

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VIII, HEFT 4 (SCHLUSSHEFT)

MIT 22 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 1. DEZEMBER 1954)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1954

Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwangsläufig nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5  
Tel. U 26 5 60, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefasst sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskripts geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fäden erfolgen.

Der Verlag.

## Band VIII, Heft 4

## Inhaltsverzeichnis

### Originalarbeiten

Seite

E. R. Berger, Tensorflächen, Tensorellipsen und Tensorkreise. (Mit 5 Textabbildungen.)	231
M. Z. E. Krzywoblocki, Bergman's Linear Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. C. Axially Symmetric Flow und Singularities . . . . .	237
W. Müller, Zur Bestimmung der Trägheitskoeffizienten unsymmetrischer Rotationskörper. (Mit 5 Textabbildungen.) . . . . .	263
K. Oswatitsch und L. Sjödin, Kegelige Überschallströmung in Schallnähe. (Mit 4 Textabbildungen.) . . . . .	284
C. Kämmerer, Strömung in einer Expansionsdüse mit Reibung. (Mit 7 Textabbildungen.)	293
Persönliches . . . . .	307
C. Kämmerer, H. Mache gestorben.	

### Buchbesprechungen

307

Benny, L. B., Mathematics for Students of Engineering and Applied Science (R. Inzinger). — Bird P. F. und M. D. Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists (R. Inzinger). — Charlton, T. M., Model Analysis of Structures (E. Czitányi). — Eck, B., Technische Strömungslehre. 4. Aufl. (R. Bruniak). — Federhofer, K., Aufgaben aus der Hydromechanik (F. Magyar). — Finkelnburg, W., Einführung in die Atomphysik. 3. Aufl. (F. Regler). — Girkmann, K., Flächentragwerke. 3. Aufl. (K. Federhofer). — Großmann, W., Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie (F. Hauer). — Melan E. und H. Parkus, Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder (K. Federhofer). — Pucher, A., Lehrbuch des Stahlbetonbaues. 2. Aufl. (F. Pongratz). — Sachs, K., Elektrische Triebfahrzeuge. Bd. 1 u. 2. (H. Sequenz).	
---	--

## Tensorflächen, Tensorellipsen und Tensorkreise.

Von Erich R. Berger, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Es werden die vier Tensorflächen — lineare, reziproke, quadratische und reziprok-quadratische Tensorfläche — samt ihren Eigenschaften kurz besprochen, und erklärt, warum im Zweidimensionalen der Unterschied zwischen der linearen und der reziproken Tensorellipse sich verwischt. Ausgehend von einer kinematischen Erzeugung der quadratischen Tensorellipse wird gezeigt, wie man durch Abänderung des Mechanismus zu den beiden bekannten Kreisdarstellungen kommt, dem Spannungskreis von Culmann-Mohr und dem Trägheitskreis von Mohr-Land.

**Summary.** The four tensor faces — linear, reciprocal, square, and reciprocal-square — are shortly discussed together with their properties, and an explanation is adduced why in the two-dimensional domain the difference vanishes between the linear and the reciprocal tensor ellipses. Starting from the kinetic production of the square tensor ellipse it is demonstrated how, by altering the mechanism, the two well-known circular presentations are arrived at, viz. the tension-circle of Culmann-Mohr and the inertia-circle of Mohr-Land.

**Résumé.** L'auteur discute brièvement les quatre surfaces-tenseur, à savoir les surfaces linéaire, réciproque, carée et réciproque-carrée, ainsi que leurs qualités et attributs, et il fournit l'explication pourquoi dans le domaine des deux dimensions la différence entre l'ellipse-tenseur linéaire et l'ellipse-tenseur réciproque disparaît. En partant de la production cinématique de l'ellipse-tenseur carrée l'auteur démontre comment en modifiant le mécanisme on arrive aux deux représentations circulaires connues, le cercle de tension selon Culmann-Mohr et le cercle d'inertie selon Mohr-Land.

In einem kurzen Aufsatz in dieser Zeitschrift hat Jung<sup>1</sup> seinerzeit die enge Verwandtschaft zwischen den Tensorkreisen von Culmann und von Mohr (bzw. Land; vgl. dazu den zitierten Aufsatz) nachgewiesen. Das Folgende soll ein Versuch sein, diesen Zusammenhang noch unmittelbarer anschaulich zu zeigen. Dabei wird zunächst etwas weiter ausgeholt, um den Unterschied zwischen den verschiedenen Tensorflächen und -ellipsen zu diskutieren, weil diese Unterscheidung oft nicht klar genug herausgearbeitet wird. Eine rühmliche Ausnahme in dieser Hinsicht bildet Lagally<sup>2</sup>, auf den sich auch die folgende Arbeit zum Teil stützt.

Es sei  $\mathfrak{A}$  ein symmetrischer, zweistufiger, dreidimensionaler Tensor mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Legt man das Koordinatensystem in die Hauptachsenrichtungen, dann ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ferner sei  $e$  ein beliebiger Einheitsvektor; dann ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{A} \cdot e \quad (2)$$

<sup>1</sup> Jung: Der Culmannsche und der Mohrsche Kreis. Österr. Ingenieur-Arch. 1, 408—410 (1947).

<sup>2</sup> Lagally: Vektorrechnung, S. 197ff. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1928.

ebenfalls ein Vektor. (Der Punkt bedeute die skalare Multiplikation.) Denken wir uns die zu sämtlichen Lagen von  $e$  zugehörigen Vektoren  $\mathfrak{z}$  als Ortsvektoren aufgetragen, so erfüllen ihre Endpunkte eine Fläche. Es ist nun umgekehrt

$$e = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{z}$$

und damit ergibt sich für die Flächengleichung

$$1 = e \cdot e = \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{z}$$

oder kurz

$$\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{A}^{-2} \cdot \mathfrak{z} = 1. \quad (3)$$

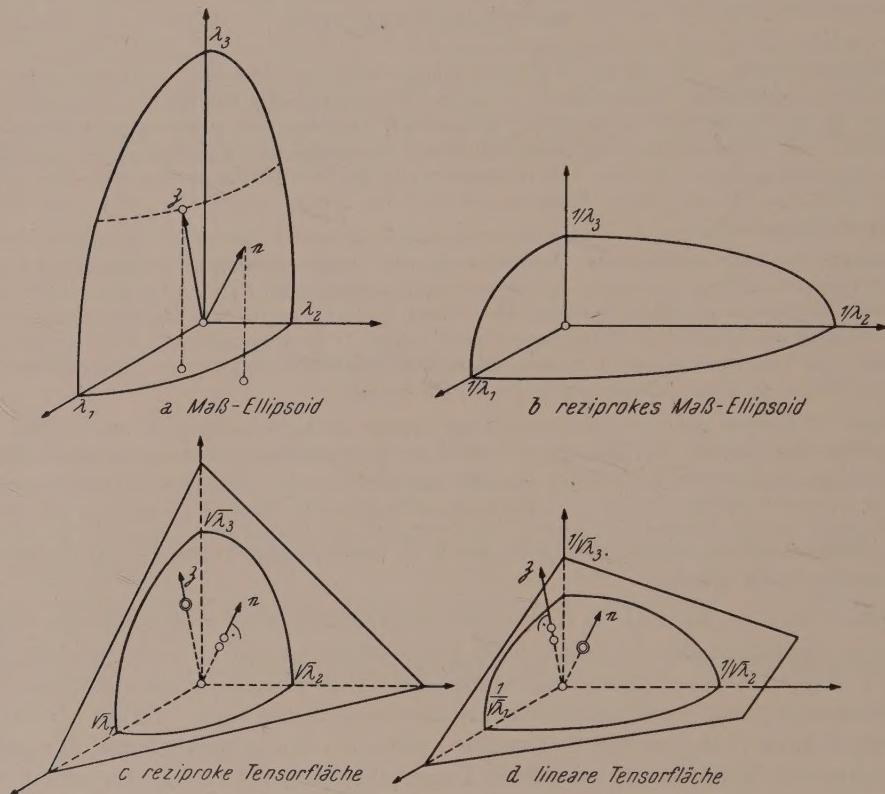


Abb. 1. Die vier Tensorflächen.

Die Fläche ist von der zweiten Ordnung, die Koeffizientenmatrix lautet nach (1):

$$\mathfrak{A}^{-2} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten sind sämtlich positiv, es handelt sich somit in jedem Fall um ein Ellipsoid, mit den Hauptachsenlängen  $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|$ , das unter Umständen, wenn ein Eigenwert Null wird, zu einer ebenen Ellipse abflacht. Entsprechend der Potenz von  $\mathfrak{A}$  sprechen wir hier vom „reziprok quadratischen Tensorellipsoid“ oder auch vom „Maßellipsoid“ (Abb. 1a). Ein Beispiel dafür ist das Lamésche Spannungsellipsoid. Eine unmittelbar anschaulich-geometrische Beziehung zwischen  $e$  und  $\mathfrak{z}$  ist an diesem Ellipsoid nicht vorhanden.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch noch die Fläche

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{A}^2 \cdot \mathfrak{x} = 1$$

erwähnt, das „quadratische Tensorellipsoid“ oder „reziproke Maßellipsoid“ (Abb. 1b); dazu gehört z. B. das von Cauchy verwendete Spannungsellipsoid.

Für manche Anwendungen benötigt man nicht den ganzen Vektor  $\mathfrak{z}$ , sondern nur seine Komponente in der Richtung von  $e$ , das heißt man interessiert sich nur für den Skalar

$$\mathfrak{z} \cdot e = e \cdot \mathfrak{A} \cdot e = i^2. \quad (4)$$

Die Bezeichnung  $i^2$  wurde hier im Anlehnung an den Trägheitsradius gewählt; es ist aber festzuhalten, daß im allgemeinen Fall dieser Skalar durchaus nicht immer positiv zu sein braucht, das heißt  $i$  nicht immer reell ist. Trägt man nun den Vektor

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{i} e \quad (5)$$

als Ortsvektor auf, so ist  $e = i \mathfrak{x}$  und daher nach (4)

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = 1. \quad (6)$$

Wieder haben wir die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung vor uns, aber diesmal enthält sie den Tensor in der plus ersten Potenz, wir sprechen daher von der „linearen Tensorfläche“ (Abb. 1d). Dazu gehört z. B. das bekannte Trägheitsellipsoid nach Cauchy und Poinsot. Die Hauptachsen haben die Längen  $1/\sqrt{\lambda_1} = 1/i_1$ ,  $1/\sqrt{\lambda_2} = 1/i_2$ ,  $1/\sqrt{\lambda_3} = 1/i_3$  und nur, wenn alle drei Eigenwerte positiv sind, liegt ein Ellipsoid vor. Beim Trägheitstensor ist das bestimmt der Fall, würde man aber z. B. einen Spannungstensor in dieser Art auftragen, könnte sich auch ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid ergeben; falls ein Eigenwert Null ist, ein Zylinder, und wenn zwei Eigenwerte verschwinden, zwei parallele Ebenen.

Hier ist es ziemlich leicht, an Hand der Fläche den Zusammenhang zwischen  $e$  und  $\mathfrak{z}$  zu rekonstruieren. Legen wir im Punkt  $\mathfrak{x}$  die Tangentialebene an die Fläche, und bezeichnen wir den Ortsvektor in der Ebene mit  $\mathfrak{y}$ , so lautet nach (6) die Gleichung der Ebene

$$\mathfrak{y} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}) = 1,$$

oder mit (5) und (2):

$$\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{z} = i. \quad (7)$$

Man ersieht daraus, daß der Vektor  $\mathfrak{z}$  auf der Tangentialebene senkrecht steht. Wenn wir nun unter  $\mathfrak{y}$  weiterhin speziell das Lot auf die Tangentialebene verstehen, so ist  $\mathfrak{y}$  parallel zu  $\mathfrak{z}$  und

$$|\mathfrak{z}| = \frac{i}{|\mathfrak{y}|} = \frac{1}{|\mathfrak{x}| |\mathfrak{y}|}. \quad (8)$$

Damit sind Richtung und Länge von  $\mathfrak{z}$  festgelegt.

Eine weitere Darstellung ergibt sich, wenn man zu jedem Einheitsvektor  $e$  eine dazu senkrechte Ebene legt im Abstand  $i$  vom Ursprung. Ihre Gleichung lautet:

$$\mathfrak{y} \cdot e = i. \quad (9)$$

Alle diese Ebenen umhüllen eine Fläche; den Berührpunkt erhalten wir in bekannter Weise, indem wir (9) quadrieren:

$$(\mathfrak{y} \cdot e)^2 = i^2 = e \cdot \mathfrak{A} \cdot e, \quad (9a)$$

und diese Gleichung nach dem „Scharparameter“, das heißt hier: nach  $e$  formal differenzieren:

$$2(\mathfrak{y} \cdot e)\mathfrak{y} = 2\mathfrak{A} \cdot e.$$

Das ergibt mit (9) für den Ortsvektor  $\eta$  des Berührungspunktes

$$\eta = \frac{1}{i} \mathfrak{A} \cdot e \quad (10a)$$

bzw.

$$\zeta = \mathfrak{A} \cdot e = i \eta. \quad (10b)$$

Nun kann man aber (9a) auch schreiben:

$$i^2 = e \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot e$$

und mit (10b):

$$i^2 = i \eta \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \eta i,$$

das heißt

$$\eta \cdot \mathfrak{A}^{-1} \cdot \eta = 1. \quad (11)$$

Da hier der reziproke Tensor von  $\mathfrak{A}$  auftritt, sprechen wir von der „reziproken Tensorfläche“ (Abb. 1c). Ein Beispiel dafür ist das Drallellipsoid nach Mac Cullagh, das reziproke Ellipsoid des Trägheitstensors. Die Hauptachsen der Fläche haben die Längen  $\sqrt{\lambda_1} = i_1$ ,  $\sqrt{\lambda_2} = i_2$ ,  $\sqrt{\lambda_3} = i_3$ . Auch hier kann an Stelle eines Ellipsoides wieder eine andere Mittelpunktfläche 2. Ordnung auftreten.

Für den Zusammenhang zwischen den Vektoren  $e$  und  $\zeta$  gilt hier, daß der Vektor  $\zeta = i \eta$  zum Berührungs punkt der Tangentialebene zeigt, während anderseits  $e$  auf der Tangentialebene senkrecht steht: genau umgekehrt gegenüber der linearen Tensorfläche, wie es der Reziprozität der beiden dargestellten Tensoren entspricht.

Die scharfe begriffliche Trennung dieser verschiedenen Tensorflächen wird dadurch etwas erschwert, daß im Zweidimensionalen der Unterschied zwischen der linearen und der reziproken Tensorkurve sich ziemlich verwischt. Die lineare oder „erste Tensorellipse“ hat die Achsen  $1/\sqrt{\lambda_1}$  und  $1/\sqrt{\lambda_2}$ , die reziproke dagegen  $\sqrt{\lambda_1}$  und  $\sqrt{\lambda_2}$ . Da die beiden Achsenverhältnisse reziprok sind, sind auch die beiden Ellipsen geometrisch ähnlich (was bei den Ellipsoiden nicht der Fall ist). Allerdings sind die Achsen gegeneinander vertauscht, aber auch dieser Unterschied verschwindet, wenn man bei der reziproken Ellipse die Abstände  $i$  nicht in der Richtung von  $e$ , sondern senkrecht dazu aufträgt (ein Verfahren, das man im Raum nicht nachahmen kann). Dadurch wird auch die Ellipse um  $90^\circ$  gedreht und kommt damit in dieselbe Lage wie die lineare Ellipse: sie wird jetzt als „zweite Tensorellipse“ bezeichnet. Da überdies die Größe der Ellipse eine reine Maßstabfrage ist (entweder  $\sqrt{\lambda}$  oder  $1/\sqrt{\lambda}$  ist keine Länge, man benötigt daher mindestens einen willkürlich gewählten Maßstab), so werden diese beiden Ellipsen, abgesehen von ihrer begrifflichen Entstehung, geradezu identisch. So spricht man beim Trägheitstensor von der Trägheitsellipse schlechthin, wobei die Achsen üblicherweise gleich den Trägheitsradien  $i_1$  und  $i_2$  gewählt werden, das heißt es wird eigentlich der Tensor  $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}/M$  dargestellt, wobei  $M$  die Gesamtmasse bzw. -fläche ist. Dementsprechend ist das Ergebnis  $\zeta$  immer noch mit  $M$  zu multiplizieren, damit man die gesuchten Trägheits- und Deviationsmomente erhält. — Wollte man den Spannungstensor in analoger Weise darstellen, so ergäbe sich je nachdem eine Ellipse, eine Hyperbel oder zwei parallele Gerade.

Entsprechend ihrer doppelten Entstehung kann man nun die Tensorellipse auch in doppelter Art verwenden (Abb. 2; in der Abb. sind an den Achsen die Bezeichnungen  $i_1$  und  $i_2$  zu vertauschen; an den Vektoren der linken Hälfte ist der Faktor  $i_1 i_2 / i$  zu ersetzen durch  $1/i$ ):

a) Man zieht einen Radius in Richtung  $e$ , legt im Durchstoßpunkt die Tangente und fällt darauf das Lot; dann gibt dieses die Richtung von  $\zeta = \mathfrak{A} \cdot e$ , und das Produkt aus Radius und Lot, gebrochen durch  $i_1^2 \cdot i_2^2$  ist der Reziprok betrag von  $\zeta$ .

b) Man legt parallel zur Richtung  $e$  eine Tangente an die Ellipse; dann ergibt der Ortsvektor des Berührungs punktes die Richtung senkrecht auf  $\mathfrak{z}$ , und das Produkt aus Radius und Lot den Betrag von  $\mathfrak{z}$ . In diesem zweiten Fall erhält man  $\mathfrak{z}$  gleich in Komponenten zerlegt, nämlich in Richtung  $e$  und senkrecht dazu: die Länge des Tangentenabschnittes mal dem Lot ist gleich der Senkrechtkomponente von  $\mathfrak{z}$ , z. B. beim Trägheitstensor gleich dem Deviationsmoment gebrochen durch die Gesamtmasse.

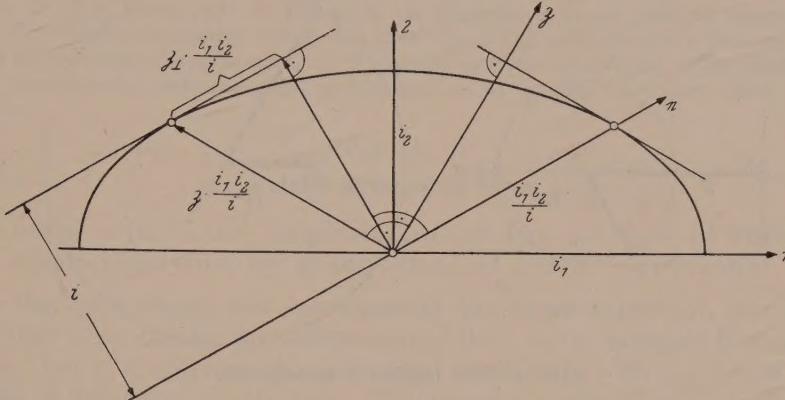


Abb. 2. Die Tensor-Ellipse.

Ebenso wie die lineare und die reziproke, werden in der Ebene auch die quadratische und die quadratisch-reziproke Tensorellipse identisch, abgesehen von ihrer Orientierung, die wir aber nicht benützen werden. Aus dieser sonst nicht benützten quadratischen Tensorellipse werden wir nun die beiden Tensorkreise herleiten.

Es seien  $\lambda$  und  $\mu$  die beiden Eigenwerte des Tensors,  $x$  und  $y$  die Komponenten von  $e$ , bezogen auf die Hauptachsen, dann ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{A} \cdot e = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix};$$

das lässt sich aber umformen in

$$\mathfrak{z} = \frac{\lambda + \mu}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\lambda - \mu}{2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \frac{\lambda + \mu}{2} e + \frac{\lambda - \mu}{2} \tilde{e}, \quad (12)$$

wobei  $\tilde{e}$  den an der  $x$ -Achse gespiegelten Vektor  $e$  bedeutet. Damit kommen wir nun zu der bekannten kinematischen Konstruktion der Ellipse (hier handelt es sich immer um eine Ellipse!) durch ein Kurbelpaar, bei dem die zweite Kurbel mit derselben Winkelgeschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung dreht wie die erste (Abb. 3). Nach (12) hat dabei die erste Kurbel die Richtung von  $e$ , wir können somit  $\mathfrak{z}$  leicht in seine beiden Komponenten parallel und senkrecht zu  $e$  zerlegen. Sie seien mit  $\sigma$  und  $\tau$  bezeichnet, in Anlehnung an den Spannungstensor.

Von dieser Ellipsenkonstruktion ausgehend, erhalten wir die beiden Kreise durch eine kleine Abänderung der Zeichenvorrichtung: bisher bewegten sich beide Kurbeln über das Zeichenblatt, der Punkt  $A$  war fest und der Punkt  $C$  zeichnete die Ellipse. Befestigen wir aber das Blatt am Hebel  $AB$ , so zeichnet der Stift in  $C$  einen Kreis um  $B$ , und wir erhalten die bekannte Darstellung von Culmann bzw. Mohr für den Spannungstensor (Abb. 4a). Befestigen wir hingegen das Blatt am Hebel  $BC$  und

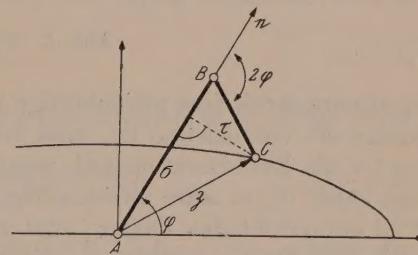


Abb. 3. Kinematische Erzeugung der Tensorellipse.

bringen den Stift in  $A$  an, so zeichnet er einen Kreis um  $B$ , und wir haben damit die ebenfalls bekannte Darstellung von Mohr für den Trägheitstensor (Abb. 4 b), häufig, aber zu Unrecht, auch nach Land bezeichnet. Selbstverständlich kann man jeden der beiden Tensoren auch in der anderen Weise darstellen, was Klotter<sup>3</sup> bereits für den Spannungstensor gezeigt hat.

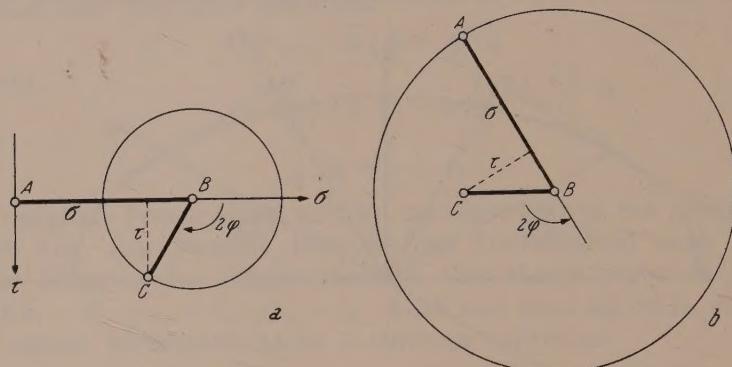


Abb. 4. Die beiden Tensorkreise.

Aus dieser Herleitung ergibt sich auch, warum in den Kreisdarstellungen der Radius gegenüber  $e$  mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit dreht, und zwar im Spannungskreis gegenläufig, im Trägheitskreis gleichläufig. Will man auch im

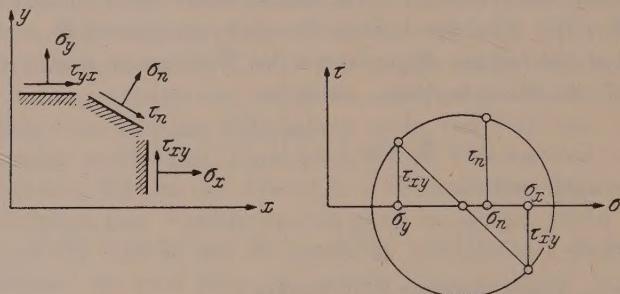


Abb. 5. Positive Spannungsrichtungen.

Spannungskreis eine gleichläufige Darstellung, was für die Verfolgung der Zusammenhänge oft vorzuziehen ist, muß man den Kreis spiegeln, das heißt man trägt z. B.  $\sigma$  und  $\tau$  als Rechtssystem auf, wenn man sie im Schnittbild als Linkssystem definiert hat (Abb. 5); es wäre zweckmäßig, diese Festlegung allgemein einzuführen<sup>4</sup>. In diesem Fall entspricht das Paar  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  der allgemeinen Definition (Linkssystem), nicht aber das Paar  $\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$ , die ein Rechtssystem bilden. Man soll daher bei der Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises ein positives  $\tau_{xy}$  über  $\sigma_y$  nach oben auftragen, dagegen über  $\sigma_x$  nach unten: dann drehen Schnittfläche und Kreisradius im gleichen Sinn. Beim Trägheitskreis wird die Gleichsinnigkeit bereits durch die Konstruktionsvorschrift (Auftragung des Deviationsmomentes) gewährleistet.

<sup>3</sup> Klotter: Graphische Darstellung zugeordneter Spannungs- und Verzerrungszustände. Ingenieur-Arch. 4, 354—364 (1933).

<sup>4</sup> Vgl. auch KAPPUS, Polkonstruktion zum Mohrschen Spannungs- und Verzerrungskreis; Stahlbau 22, 138—140 (1953).

# Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow.

## C. Axially Symmetric Flow and Singularities.

By M. Z. E. Krzywoblocki, University of Illinois.

**Summary.** In this third part of his work on Bergman's linear integral operator method, the author at first discusses axially symmetric flow where the method of infinite approximations by a sequence of linear equations is applied. A discussion of the properties of Bergman's operator, singularities, fundamental solutions and generalization of Blasius' formulae close this part.

### Part V.

#### Axially Symmetric Flow

##### 1. General equations, explanation of the method of infinite approximation by a sequence of linear equations.

Perhaps the most basic, and consequently the most important, particular case of a spatial flow is an axially symmetric spatial flow, as for example flow past bodies of revolution. Let  $x, r, \chi$  denote the cylindrical coordinates with the  $x$ -axis coincident with the axis of symmetry of the flow. The velocity vector then no longer depends on the rotation angle  $\chi$ , but rather entirely on  $x$  and  $r$ , and always lies in a meridian plane (plane through the  $x$ -axis). As a result, the flow in all meridian planes is the same, and needs to be studied only in a given meridian plane. Below we shall apply the hodograph transformation. Thus,  $x, r$  denote the cylindrical coordinates in the physical plane in which the flow actually takes place, whereas the corresponding velocity components,  $u, v$ , determine the cylindrical coordinates in the hodograph plane. The velocity potential equation of an axially symmetric flow in the physical plane has the form:

$$\varphi_{xx}(1 - \varphi_x^2/a^2) + \varphi_{rr}(1 - \varphi_r^2/a^2) - 2\varphi_{xr}\frac{\varphi_x\varphi_r}{a^2} + \varphi_r/r = 0, \quad (5.1.0)$$

where  $\varphi$  is the velocity potential and the subscripts denote partial differentiation. As is known, the following relations hold:  $u = \varphi_x$ ,  $v = \varphi_r$ . When transforming this equation into the hodograph plane, we introduce a new function  $\Phi$  connected with  $\varphi$  by means of the formula:

$$\Phi = x\varphi_x + r\varphi_r - \varphi. \quad (5.1.1)$$

Then in the hodograph plane  $(u, v)$ , the equation for the function  $\Phi$  is of the form

$$L(\Phi) - N(\Phi) = 0, \quad \text{or} \quad L(\Phi) = N(\Phi), \quad (5.1.2)$$

where

$$L(\Phi) = \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\Phi_{uu} + \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\Phi_{vv} + 2\frac{uv}{a^2}\Phi_{uv}, \quad (5.1.2a)$$

$$N(\Phi) = -\frac{v}{\Phi_v}(\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2) = -\frac{v}{\Phi_v}\frac{\partial(\Phi_u, \Phi_v)}{\partial(u, v)}, \quad (5.1.2b)$$

$$a^2 = \gamma(\hat{q}^2 - u^2 - v^2), \quad \gamma = \frac{1}{2}(k - 1). \quad (5.1.2c)$$

The quantities  $\gamma$  and  $\hat{q} = q_{\max}$  are constants. We note that in polar coordinates we have  $q = (u^2 + v^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \arctan(v/u)$  and equations (5.1.2a) and (5.1.2b) assume the form

$$L(\Phi) = \left[ q^2 \Phi_{qq} + q \left( 1 - \frac{q^2}{\alpha^2} \right) \Phi_q + \left( 1 - \frac{q^2}{\alpha^2} \right) \Phi_{\theta\theta} \right] q^{-2}, \quad (5.1.2d)$$

$$N(\Phi) = \Phi_v^{-1} \{ q^{-1} \sin \theta [\Phi_{qq} (q \Phi_q + \Phi_{\theta\theta}) - (\Phi_{\theta\theta} - q^{-1} \Phi_{\theta\theta})^2] \}, \quad (5.1.2e)$$

with

$$\Phi_v = \Phi_q \sin \theta + q^{-1} \Phi_{\theta\theta} \cos \theta.$$

In the solution of the problem of an axially symmetric flow, we shall restrict our attention at first to the case of analytic solutions (for the definition of analytic functions, see Part VI), and then we shall consider these solutions for complex values of the arguments. The method of solution of equation (5.1.2) by means of successive approximations will be explained.

If we should have a plane flow, then, as one may easily verify, the equation in the hodograph plane would have the form

$$L(\Phi^{(0)}) = 0. \quad (5.1.3)$$

Denote a solution of (5.1.3) by  $\Phi^{(0)}$ . Then:

$$\Phi^{(0)} = x \varphi_x^{(0)} + r \varphi_r^{(0)} - \varphi^{(0)}, \quad (5.1.4)$$

where  $\varphi^{(0)}$  is the velocity potential. Consider  $\Phi^{(0)}$  as the first approximation to the solution of equation (5.1.2). The method to be discussed is based on the fact that for those  $\varphi^{(0)}(x, r)$  which yield flow patterns past profiles of interest in applications, comparatively simple formulas can be obtained, using, for instance, the operator method. Hence, considering  $\Phi^{(0)}$  as the initial approximation in that part of the plane where  $r$  (the distance of the flow under consideration from the rotation axis) is substantially larger than zero, the higher approximations can be obtained by solving the set of equations

$$L(\Phi^{(n)}) = N(\Phi^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.1.5)$$

If the functions  $\Phi^{(n)}$  converge to a limit  $\Phi$ , then in many instances  $\Phi$  will represent a solution of equation (5.1.2) with slightly distorted boundary conditions. The corresponding

$$\varphi = q \Phi_q - \Phi, \quad (5.1.6)$$

will represent a potential in the hodograph plane of an axially symmetric flow past a profile which is obtained by a slight distortion from the boundary profile corresponding to  $\varphi^{(0)}$ . By some additional considerations, these distortions can be diminished considerably.

In the most general case, the equation  $L(\Phi) = N(\Phi)$  is a non-linear one. Thus, applying the method of successive approximations (5.1.5), we replace the non-linear equation by a sequence of linear non-homogeneous equations. An important task which arises is the development of a procedure suitable for solving these equations, for practical purposes, at least for a small number of approximations, say one or two. As is known in the study of linear equations, say in the case  $L(\Psi)$ , the fact that if  $\Psi_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , are solutions of  $L = 0$ , the linear combination  $\sum c_\nu \Psi_\nu$ , where  $c_\nu$  are arbitrary constants, is also a solution of  $L$ , is of great advantage for numerical applications. Similarly, this fact permits us to prepare, once and for all, tables of a set of particular solutions  $\Psi$ , which can then be used conveniently in determining a solution satisfying prescribed initial or boundary conditions. Below, we shall show which tables can be used in the initial approximations, in order to enable one to determine a complete set of particular solutions. Moreover, such tables can be computed for those values of the arguments in which we are particularly

interested; in addition, this procedure gives us a certain insight into the variation of the solution if some parameters, for instance the boundary data, vary.

In our particular case, a considerable simplification may be achieved if the expression  $N(\Phi^{(n-1)})$  in (5.1.5) is replaced by

$$N_0(\Phi^{(n)}) = -\frac{2v}{\Phi_{v \max}^{(n-1)} + \Phi_{v \min}^{(n-1)}} \frac{\partial(\Phi_u^{(n-1)}, \Phi_v^{(n-1)})}{\partial(u, v)}, \quad (5.1.7)$$

where  $\Phi_{v \max}^{(n-1)}$  and  $\Phi_{v \min}^{(n-1)}$  are the maximum and minimum values  $\Phi_v^{(n-1)}$  in the domain in which the function is considered. Below, we shall discuss the application of such a procedure in our case.

As mentioned above, we shall limit ourselves to the study of analytic solutions. The advantage in making this restriction and in considering the equation in the complex domain is that we can simultaneously consider the sub- and the supersonic regions and obtain solutions for the mixed case.

## 2. The determination of $\Phi^{(0)}$ .

In this section, we shall determine the solution  $\Phi^{(0)}$  of the equation  $L(\Phi^{(0)}) = 0$ , corresponding to flows past profiles of interest to us. As it has been shown in previous sections, the stream funktion  $\Psi^{(0)}$  of a twodimensional flow pattern can be represented in the form

$$\Psi^{(0)} = \operatorname{Im} \left\{ \int_{t=-1}^{t=+1} E(Z, \bar{Z}, t) f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt \right\}, \quad (5.2.1)$$

$$Z = \lambda(q) + i\theta, \quad \bar{Z} = \lambda(q) - i\theta, \quad (5.2.1a)$$

where  $E$  is the generating function of the integral operator, and  $f$  is an arbitrary function of a complex variable. Here we may use alternatively  $Z = \lambda - i\theta$ ,  $\bar{Z} = \lambda + i\theta$ , where

$$\lambda(q) = \int_q^q [a_0^2 - (\gamma + 1)q^2]^{1/2} [a_0^2 - \gamma q^2]^{-1/2} q^{-1} dq. \quad (5.2.2)$$

If, instead of considering the "exact" compressibility equation, we consider the so-called "simplified" compressibility equation, then the generating function  $E$  becomes a hypergeometric function. This was indicated in Part IV. As is known, in this particular case, the quantities  $\lambda$  and  $H$  are connected by the relation:

$$H = c(-\lambda)^{2/3}, \quad (5.2.3)$$

where  $c$  is constant.

Considering plane flows of compressible flows, the generating function  $E$  is of the form:

$$E = c(-2\lambda)^{1/6} F(1/6, 5/6, 1/2, X), \quad (5.2.4)$$

$$X = t^2 [c H^{2/3}(q) + i\theta - \lambda_0] [2 H^{2/3}(q)]^{-1}, \quad (5.2.4a)$$

where  $F$  is the hypergeometric function and  $\lambda_0$  is a conveniently chosen constant. Let us keep in mind that in various parts of the plane, the hypergeometric function has to be represented by different power series developments. Concerning the function  $f$ , it may be chosen arbitrarily. For example, in order to obtain flow patterns past an elliptical shape, the function  $f$  should be of the form [1, pp. 217 and 218]:

$$f = \frac{1}{2} U \left\{ \left[ \frac{\exp Z - R^2 U}{\exp \bar{Z} - U} \right]^{1/2} + R^2 \left[ \frac{\exp Z - U}{\exp \bar{Z} - R^2 U} \right]^{1/2} \right\}, \quad (5.2.5)$$

where  $R = \text{const}$ . An analogous pattern will be preserved in the present case.

<sup>1</sup> S. Bergman and B. Epstein: Determination of a compressible fluid flow past an oval-shaped obstacle. J. Math. Physics **26**, 195—222 (1948).

Equation  $L(\Phi^{(0)}) = 0$  may be solved by means of several methods. Applying the method of separating the variables, one obtains solutions of  $L(\Phi^{(0)}) = 0$  in the form of an expression which represents an approximation

$$\sum_{\nu=-N}^N A_\nu w^{|\nu|} \exp(i\nu\theta) F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, q^2 \hat{q}^{-2}), \quad (5.2.6)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\nu \hat{q}^2 + (4\gamma)^{-1} + A, \quad \beta = \frac{1}{2}\nu \hat{q}^2 + (4\gamma)^{-1} - A, \quad \bar{\gamma} = \nu + 1, \quad (5.2.6a)$$

$$4A^2 = \nu^2 \hat{q}^4 + (\nu \hat{q}^2 + \nu^2 - \nu) \gamma^{-1} + (4\gamma^2)^{-1}. \quad (5.2.6b)$$

The symbol  $F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots)$  denotes the hypergeometric function. It remains for us to calculate the coefficients  $A_\nu$ , which correspond to the stream function (5.2.1) with  $f$  from (5.2.5), say. At first, let us note that equation (5.1.4) may be transformed into the form [analogous to equation (5.1.6)]:

$$\varphi^{(0)} = q \Phi_q^{(0)} - \Phi^{(0)}. \quad (5.2.7)$$

Our next step is to find a relation between  $\psi^{(0)}$  and  $\varphi^{(0)}$ . From the elementary relations between velocity potential and stream function, we have:

$$\varphi_\theta^{(0)} = \varrho_0 \varrho^{-1} q \psi_q^{(0)}, \quad (5.2.7a)$$

$$\varphi_q^{(0)} = -\varrho_0 \varrho^{-1} (1 - M^2) q^{-1} \psi_\theta^{(0)}. \quad (5.2.7b)$$

From the relation (5.2.7), we have:

$$\varphi_\theta^{(0)} = q \Phi_{q\theta}^{(0)} - \Phi_\theta^{(0)}, \quad (5.2.7c)$$

$$\varphi_q^{(0)} = q \Phi_{qq}^{(0)} + \Phi_q^{(0)} - \Phi_q^{(0)} = q \Phi_{qq}^{(0)}. \quad (5.2.7d)$$

Combining (5.2.7a) through (5.2.7d), we get:

$$q \Phi_{qq}^{(0)} = -\varrho_0 \varrho^{-1} (1 - M^2) q^{-1} \psi_\theta^{(0)}, \quad (5.2.8a)$$

$$q \Phi_{q\theta}^{(0)} - \Phi_\theta^{(0)} = \varrho_0 \varrho^{-1} q \psi_q^{(0)}, \quad (5.2.8b)$$

where

$$\varrho = \varrho(q) = \varrho_0 [1 - \gamma c_0^{-2} q^2]^{1/(2\nu)}, \quad (5.2.8c)$$

and  $c_0 = \text{constant}$ , denotes the velocity of sound at rest. Suppose that we have found the values of the function  $\psi^{(0)}$  by means of the integral operator method, for instance. Then, using (5.2.6), we express  $\Phi^{(0)}$  by means of a polynomial or a series

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} B_\nu q^{|\nu|} \exp(i\nu\theta) F_{|\nu|}, \quad (5.2.9)$$

with  $N$  finite or  $N \rightarrow \infty$ . Assume also that  $B_\nu = \bar{B}_{-\nu}$ , i.e., that  $B_\nu$  and  $B_{-\nu}$  are conjugate. The coefficients  $B_\nu$  can be found from (5.2.8b) with the use of (5.2.1):

$$q \Phi_{q\theta}^{(0)} - \Phi_\theta^{(0)} = \varrho_0 \varrho^{-1} (q) q \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \text{Im} \left[ \int_{-1}^{+1} E^{(0)}(Z, \bar{Z}, t) \cdot f \left( \frac{1}{2} Z (1-t^2) \right) (1-t^2)^{-1/2} dt \right] \right\}. \quad (5.2.10)$$

where  $E^{(0)}$  and  $f$  are functions (5.2.4) and (5.2.5), say. The convergence of the series (5.2.9) is assured if the solutions represented by (5.2.9) are supposed to be analytic functions of  $q$  and  $\theta$  in the interval  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . In particular, it is possible to insert for  $q$  a specific constant value, say  $q = q_0$ . This may be done since in the following, the expression (5.2.6) will always be considered in a comparatively small

neighborhood, in which  $q$  varies only slightly. If, then, (5.2.9) is approximated, for practical purposes, by a polynomial in the sense that

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} B_{\nu} q_0^{|\nu|} \exp(i\nu\theta) F_{|\nu|} - \sum_{\nu=-N}^N B_{\nu} q_0^{|\nu|} \exp(i\nu\theta) F_{|\nu|} \right|^2 d\theta = \min., \quad (5.2.11)$$

then we may show that

$$B_0^{(N)} = B_0 = \bar{A}_1 (\bar{B}_1)^{-1}, \quad B_{\nu}^{(N)} = B_{\nu} = \bar{A}_2(\nu) [\bar{B}_2(\nu)]^{-1}, \quad \nu \neq 0, \quad (5.2.12a)$$

$$\bar{A}_1 = -\hat{q}^4 \varrho_0 (1 - q_0^2/a_0^2) \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Im} \left\{ \int_{-1}^{+1} E(Z, \bar{Z}, t) \cdot f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt \right\} \Bigg|_{\theta=0}, \quad (5.2.12b)$$

$$\bar{B}_1 = 4\pi \varrho(q_0) q_0 [2q_0^2 F_0''(q_0^2/\hat{q}^2) + \hat{q}^2 F_0'(q_0^2/\hat{q}^2) + q_0^2 F_0(q_0^2/\hat{q}^2)], \quad (5.2.12c)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= \hat{q}^2 \varrho_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \text{Im} \left\{ \int_{-1}^{+1} E(Z, \bar{Z}, t) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt \right\} \exp(-i\nu\theta) d\theta \right] \Bigg|_{q=q_0}, \end{aligned} \quad (5.2.12d)$$

$$B_2 = 2\pi i\nu \varrho(q) q_0^{|\nu|-1} [\hat{q}^2 F'_{|\nu|}(q_0^2/\hat{q}^2) + 2q_0 F'_{|\nu|}(q_0^2/\hat{q}^2)]. \quad (5.2.12e)$$

In previous sections, we discussed widely the application of certain tables to the calculation of  $\psi$ . These same tables can be used to calculate  $\psi^{(0)}$  (5.2.1), and, in turn, for the computation of further tables, for the evaluation of the right-hand side of (5.2.12).

### 3. Determination of the solution of the equation in the transonic case.

As indicated above, it is convenient to approximate the set of equations (5.1.5) by the equations (5.1.7). As it will be explained in detail in the following, this permits, for certain values of  $n$ , the use of tables which can be computed once and for all. The set (5.1.5) can be approximated by (5.1.7) only in a domain where the variation of  $\Phi_v^{(n-1)}$  is comparatively small. This item complicates the procedure a little. In the following, the determination of  $\Phi^{(1)}$  will be discussed. The same procedure can then be repeated for larger  $n$ .

The domain  $B$ , in which  $\Phi^{(0)}$  is considered, is divided into a number of sufficiently small domains  $N_{\mu}$ , so that in every neighborhood  $N_{\mu}$  the variation of  $\Phi_v^{(0)}$  is sufficiently small. In order to determine  $\Phi^{(1)}$ , it will be necessary to use different procedures, depending upon whether  $N_{\mu}$  lies in the sub-, super-, or transonic region. In this section, we shall consider an  $N_{\mu}$  which lies in the transonic region.

In order to solve the equation

$$L(\Phi^{(1)}) = N_0, \quad (5.3.1)$$

in a neighborhood  $N_{\mu}$  of the sonic line, it is convenient to replace  $q$  by a new variable

$$Q = \gamma \hat{q}^2 - (\gamma + 1) q^2. \quad (5.3.2)$$

Notice, that  $Q = 0$  corresponds to points on the sonic line, i. e., we consider  $Q$  to be small in the transonic case. The expression  $L(\Phi)$  assumes then the form

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= (\gamma + 1) [\gamma(\gamma \hat{q}^2 - Q)(\hat{q}^2 + Q)]^{-1} \cdot \{4\gamma(\gamma \hat{q}^2 - Q)^2(\hat{q}^2 + Q)\Phi_{QQ} - 2(\gamma \hat{q}^2 - Q) \cdot \\ &\quad \cdot [\gamma(\hat{q}^2 + Q) + Q(\gamma + 1)]\Phi_Q + Q(\gamma + 1)\Phi_{\theta\theta}\}. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

We also write

$$\gamma(\gamma + 1)^{-1}(\hat{q}^2 + Q)(\gamma \hat{q}^2 - Q)N_0 = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{2N+1} c_{s,\lambda} Q^s \exp(i\lambda\theta), \quad (5.3.4)$$

and now apply the method of power series to find  $\Phi^{(1)}$ . The result is

$$\Phi^{(1)} = A_0(\theta) + A_1(\theta)Q + \Phi_1^{(0)} + \sum_{n=-1}^{\infty} \left[ (N_{n+3})^{-1} \sum_{\lambda=-\infty}^{2N+1} M_{n+3,\lambda} \exp(i\lambda\theta) \right] Q^{n+3}, \quad (5.3.5)$$

where  $\Phi_1^{(0)}$  is an arbitrary solution of (5.1.3), and  $A_0(\theta)$  and  $A_1(\theta)$  are arbitrary analytic functions of  $\theta$ ;

$$a_{n,\lambda} = M_{n,\lambda}/N_n, \quad \text{and} \quad A_n(\theta) = \sum_{\lambda=-\infty}^{2N+1} a_{n,\lambda} \exp(i\lambda\theta), \quad \text{for } n \geq 2. \quad (5.3.6)$$

Here

$$N_m = \prod_{i=-1}^m S_i, \quad (5.3.7)$$

and

$$\begin{array}{ccccccccc} M_{n+3,\lambda} & & & & & & & & \\ \hline c_{n+1,\lambda} & T_n & U_n & V_{n,\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 0 0 \\ c_{n,\lambda} & S_{n-1} & T_{n-1} & U_{n-1} & V_{n-1,\lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 0 0 \\ c_{n-1,\lambda} & 0 & S_{n-2} & T_{n-2} & U_{n-2} & V_{n-1,\lambda} & 0 & \dots & 0 0 0 \\ \hline & \dots & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & \\ c_{3,\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & S_2 & T_2 & U_2 & V_{2,\lambda} \\ (c_{2,\lambda} - V_{1,\lambda} a_{1,\lambda}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & S_1 & T_1 & U_1 \\ (c_{1,\lambda} - V_{0,\lambda} a_{0,\lambda} - U_0 a_{1,\lambda}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & S_0 & T_0 \\ (c_{0,\lambda} - T_{-1} a_{1,\lambda}) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{-1} \\ \end{array}, \quad (5.3.8)$$

for  $n \geq 2$ .

Here

$$\begin{aligned} S_n &= 4(n+3)(n+2)\gamma^3 \hat{q}^6, \\ T_n &= [4(n+1)\gamma^3 \hat{q}^4 - (8n+10)\gamma^2 \hat{q}^4](n+2), \\ U_n &= [(4n-2)\gamma \hat{q}^2 - (8n+2)\gamma^2 \hat{q}^2](n+1), \\ V_{n,\lambda} &= [(4n-6)\gamma - 4)n - (\gamma+1)\lambda^2]. \end{aligned} \quad (5.3.8a)$$

Similar formulas hold for  $M_{2,\lambda}$ ,  $M_{3,\lambda}$ , and  $M_{4,\lambda}$ . In the computation of these constants, tables which can be prepared once and for all greatly facilitate the work. For the  $c_{s,\lambda}$  we obtain the formulas

$$\begin{aligned} c_{s,\lambda} &= (2i)^{-1} \sum_{\nu=-N}^N A_\nu (A_{\nu-\lambda-1} E_{\nu,\lambda-\nu-1}^{(s)} + A_{\nu-\lambda+1} E_{\nu,\lambda-\nu+1}^{(s)}) \quad \text{if } |\lambda| < 2N, \\ c_{s,\lambda} &= (2i)^{-1} \sum_{\nu=-N}^N A_\nu (A_{\lambda-\nu-\delta_\lambda}) \cdot E_{\nu,\lambda-\nu-\delta_\lambda}^{(s)} \\ &\quad \text{if } \lambda = \delta_\lambda (2N) \quad \text{or} \quad \lambda = \delta_\lambda (2N+1), \quad \delta_\lambda = \pm 1. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Here the  $E_{\nu,\mu}^{(s)}$  are constants which can be determined once and for all since they

are derived only from the coefficients of  $F_{|\nu|}$ . Therefore, to obtain a general solution  $\Phi_\mu^{(1)}$  of (5.1.5) in an  $N_\mu$  situated in a transonic region we write

$$\Phi_\mu^{(1)} = \Phi_\mu^{(0)} + \Phi^{(1)}, \quad (5.3.10)$$

where  $\Phi_\mu^{(0)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X_\nu^{(\mu)} q^{|\nu|} F_{|\nu|} \exp(i\nu\theta)$  is given by (5.2.9) with  $B_\nu$  replaced by arbitrary constants  $X_\nu^{(\mu)}$  which depend upon the specific solution and whose determination will be discussed below. On the other hand, in the solution  $\Phi^{(0)}$  which does not involve any arbitrary constants depending upon the specific solution, the  $B_\nu$  are completely determined (see 5.2.12), since we start from a known solution.  $\Phi^{(1)}$  is determined as follows: Using the given  $B_\nu$ , we compute  $c_{\kappa,\lambda}$  (see 5.3.9), which are substituted into (5.3.8) to obtain  $M_{n,\lambda}$ . Using these values, we finally, according to (5.3.5) calculate  $\Phi^{(1)}$ .

The coefficients are given by the formulas:

$$E_{\nu,\mu}^{(s)} = \gamma (\hat{q}^2 D_s^{(\nu,\mu)} + D_{s-1}^{(\nu,\mu)}), \quad s > 1, \quad (5.3.11a)$$

$$E_{\nu,\mu}^{(0)} = \gamma \hat{q}^2 D_0^{(\nu,\mu)}, \quad (5.3.11b)$$

where

$$D_j^{(\nu,\mu)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{N=\max(j,\sigma-1)}^{\infty} B_{(N-\sigma+1)}^{(\nu,\mu)} \gamma^{(N-j)} \cdot (\gamma+1)^{-N} \binom{N}{j} \hat{q}^{(\sigma-1-2j)} Q^j, \quad (5.3.12a)$$

if  $|\nu| + |\mu| = 2\sigma + 1$ ,  $\sigma$  integer,

$$D_j^{(\nu,\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\mu-2j)!}{2^{\mu-j} [(\mu-j)!]^2} \cdot \sum_{N=\max(j,\sigma-1)}^{\infty} B_{(N-\sigma+1)}^{(\nu,\mu)} \gamma^{(N-\mu)} \cdot (\gamma+1)^{-N} \binom{N}{j} \hat{q}^{(\sigma-1-\mu-j)} Q^j \right\}, \quad (5.3.12b)$$

if  $|\nu| + |\mu| = 2\sigma$ ,  $\sigma$  integer,

$$B_n^{(\nu,\mu)} = \sum_{j=0}^{n+3} \alpha_{\mu,j} \alpha_{\nu,n+3-j} \cdot (\nu^2 - |\nu|)(\mu^2 - |\mu|) + \nu\mu(|\nu\mu| + |\nu| + |\mu| + 1) + \\ + 2(n+3-j)(\nu\mu + |\mu|)(|\mu| - 1) + j(\mu\nu - 2|\mu| - 1)(|\nu| - 1) + \\ + 4j(j-1)(2n+4-j-|\nu|(|\nu| - 1)), \quad n = -1, 0, 1, \dots, \quad (5.3.13)$$

and

$$B_0^{(\nu,\mu)} = \alpha_{\nu,0} \alpha_{\mu,0} [(\nu^2 - |\nu|) \cdot (\mu^2 - |\mu|) + \nu\mu(|\nu\mu| + |\nu| + |\mu| + 1)], \quad (5.3.14)$$

$$B_1^{(\nu,\mu)} = (\alpha_{\mu,0} \alpha_{\nu,1} + \alpha_{\mu,1} \alpha_{\nu,0}) \cdot (\nu^2 - |\nu|)(\mu^2 - |\mu|) + \nu\mu(|\nu\mu| + |\nu| + |\mu| + 1) + \\ + 2\alpha_{\mu,0} \alpha_{\nu,1} (\mu\nu + |\mu|)(|\mu| - 1) + 2\alpha_{\mu,1} \alpha_{\nu,0} (\mu\nu - 2|\mu| - 1)(|\nu| - 1), \quad (5.3.15)$$

$$\alpha_{\nu,0} = 1, \quad (5.3.16)$$

$$\alpha_{\nu,n+1} = [n!(\nu+1+n)!]^{-1} \left\{ \nu! \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \nu \hat{q}^2 + \left( \frac{1}{4\gamma} \right) + \bar{A} \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \nu \hat{q}^2 + \left( \frac{1}{4\gamma} \right) + \bar{A} + 1 \right] \dots \right. \\ \left. \dots \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \nu \hat{q}^2 + \left( \frac{1}{4\gamma} \right) + \bar{A} + n \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \nu \hat{q}^2 + \left( \frac{1}{4\gamma} \right) - \bar{A} \right] \dots \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \nu \hat{q}^2 + \left( \frac{1}{4\gamma} \right) - \bar{A} + n \right] \right\}, \quad (5.3.17)$$

where

$$\bar{A} = \left( \frac{1}{2} \right) \{ \nu^2 \hat{q}^2 + \gamma^{-1} (\nu \hat{q}^2 + \nu^2 - \nu) + (4\gamma^2)^{-1} \}^{1/2}. \quad (5.3.18)$$

All the proofs are given in the Appendix to the version of Bergman's paper<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> S. Bergman: Determination of axially symmetric flow patterns of a compressible fluid. With an Appendix. Harvard University, Division of Engineering Sciences, Technical Report No. 16, Cambridge, Massachusetts (1951).

#### 4. Determination of the solution in the subsonic and supersonic regions.

In this and the next sections, we shall describe a method analogous to that in section V. 3, but where the subdomain  $N_\mu$  lies completely in the subsonic or in the supersonic region. A difference which now arises is that we have to operate with the new variables,  $\alpha, \beta$ :

$$\alpha = \theta + H(q), \quad \beta = \theta - H(q), \quad (5.4.1)$$

(instead of the variables  $q$  and  $\theta$ ). Here,

$$H(q) = -\arctan \left[ \frac{q^2(1+\gamma) - \gamma \hat{q}^2}{\gamma(\hat{q}^2 - q^2)} \right]^{1/2} + \left( \frac{1+\gamma}{\gamma} \right)^{1/2} \arctan \left[ \frac{q^2(1+\gamma) - \gamma \hat{q}^2}{(1+\gamma)(\hat{q}^2 - q^2)} \right]^{1/2}, \quad (5.4.2)$$

in the supersonic case; and

$$\begin{aligned} \lambda = H(q) &= i\eta(q), \quad \eta(q) = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \log \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} - \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \log \frac{\sqrt{\gamma}\varepsilon - \sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\gamma}\varepsilon + \sqrt{1+\gamma}} \right), \\ \varepsilon &= \left[ \frac{\gamma \hat{q}^2 - q^2(1+\gamma)}{\gamma(\hat{q}^2 - q^2)} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

in the subsonic case. The variables  $\alpha$  and  $\beta$  are in the subsonic case conjugate imaginary quantities, while in the supersonic region they become two independent real variables.

Furthermore, in order to solve the non-homogeneous equation (5.1.5), instead of a direct attack such as discussed in section V. 3, we shall use the method of so-called fundamental solutions.

The expression (5.1.2a) assumes, in the variables  $\alpha, \beta$  the form

$$L(\Phi) \equiv \left[ 2 \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) - 2 [H'(q)]^2 q^2 \right] \Phi_{\alpha\beta} q^{-2} + \{H''(q) - [H'(q)]^3 q\} (\Phi_\alpha - \Phi_\beta). \quad (5.4.4)$$

Here  $q$  and  $a$  are known functions of  $\alpha$  and  $\beta$ .

Besides some minor differences, the considerations in both sub- and supersonic cases proceed in almost the same manner; therefore we carry out our discussions simultaneously.

The problem of solving the system (5.1.5) reduces to solving, for every  $n$ , a non-homogeneous equation. As we mentioned before, this will be done by using so-called fundamental solutions. We shall first explain this method in the general case of a linear equation.

Let a partial differential equation

$$M(\Phi) = \Phi_{\alpha\beta} + a\Phi_\alpha + b\Phi_\beta + c\Phi = 0, \quad (5.4.5)$$

be given, where  $a, b$ , and  $c$  are functions of  $\alpha$  and  $\beta$  which are analytic in  $\alpha$  and  $\beta$  in a sufficiently small domain, say  $B$ . A solution of the non-homogeneous equation

$$M(\Phi) = N(\alpha, \beta), \quad (5.4.6)$$

where  $N(\alpha, \beta)$  is a given function which is analytic in  $B$ , can be obtained by using a fundamental solution

$$W(\alpha, \beta; A, B) = U(\alpha, \beta; A, B) [\log(\alpha - A) + \log(\beta - B)] + V(\alpha, \beta; A, B), \quad (5.4.7)$$

of  $M(\Phi) = 0$  (see <sup>3</sup>). Here  $U$  and  $V$  can be written in the form of infinite series which converge in  $B$ :

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots, \quad (5.4.8)$$

where

$$U_0 = \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \exp \left( \int_{\beta}^B a(\alpha, Y) dY \right) + \exp \left( \int_{\alpha}^A b(X, \beta) dX \right) \right], \quad (5.4.9)$$

<sup>3</sup> R. Courant and D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Vol. I and II. Berlin: Julius Springer. 1931 and 1937.

and  $U_{n+1}$  is given by

$$-U_{n+1} = \iint_{\alpha \beta}^{AB} \left( a \frac{\partial U_n}{\partial \alpha_1} + b \frac{\partial U_n}{\partial \beta_1} + c U_n \right) d\alpha_1 d\beta_1,$$

$$U_n \equiv U_n(\alpha_1, \beta_1, A, B). \quad (5.4.10)$$

Furthermore,

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \dots, \quad (5.4.11)$$

where  $V_0$  and  $V_{n+1}$  are given by

$$V_0 = \frac{(a U - U_\beta)}{(A - \alpha)} + \frac{(b U - U_\alpha)}{(B - \beta)}, \quad (5.4.12)$$

$$-V_{n+1} = \iint_{\alpha \beta}^{AB} \left( a \frac{\partial V_n}{\partial \alpha_1} + b \frac{\partial V_n}{\partial \beta_1} + c V_n \right) d\alpha_1 d\beta_1,$$

$$V_n \equiv V_n(a_1, \beta_1; A, B). \quad (5.4.12a)$$

A fundamental solution of the equation (5.4.5) satisfies (5.4.5) and possesses the property that at the point  $(A, B)$ ,  $U(\alpha, \beta; A, B) = 1$ .

The method of a fundamental solution is usually applied to the equations of elliptic type (subsonic case), in which case  $\alpha$  and  $\beta$  are conjugate.

In order to be able to apply it to the subsonic and the supersonic case, we continue the variables to complex values, and consider our functions in a four-dimensional domain  $B^4$ . Let

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

and

$$\delta = \frac{\alpha - \beta}{2i},$$

where  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ,  $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ . At a given point  $\gamma_1^{(0)}$ ,  $\gamma_2^{(0)}$ ,  $\delta_1^{(0)}$ ,  $\delta_2^{(0)}$ ,  $\Phi(\gamma_1 + i\gamma_2, \delta_1 + i\delta_2)$  satisfies simultaneously the equations

$$\left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta_1^2} \right) + \tilde{A}(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1 + i\delta_2^{(0)}) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \tilde{B}(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1 + i\delta_2^{(0)}) \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_1} +$$

$$+ \tilde{c}(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1 + i\delta_2^{(0)}) = N(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1 + i\delta_2^{(0)}), \quad (5.4.13)$$

as a function of  $\gamma_1$  and  $\delta_1$ , and

$$\left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta_2^2} \right) A(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1^{(0)} + i\delta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} + B \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1^{(0)} + i\delta_2)}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_2} +$$

$$+ C(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1^{(0)} + i\delta_2) = N(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1^{(0)} + i\delta_2), \quad (5.4.14)$$

as a function of  $\gamma_1$  and  $\delta_2$ .

In the fundamental solution (5.4.7), the quantities  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$  and  $B$  now have the following significance:

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma_1 + i\gamma_2^{(0)} + i(\delta_1 + i\delta_2^{(0)}), \\ \beta &= \gamma_1 + i\gamma_2^{(0)} - i(\delta_1 + i\delta_2^{(0)}), \\ A &= \Gamma + i\Lambda - \delta_2^{(0)} + i\gamma_2^{(0)}, \\ B &= \Gamma + i\Lambda + \delta_2^{(0)} + i\gamma_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

where  $\Gamma$  and  $\Lambda$  are real integration variables. We shall now denote it by  $\tilde{W}(\gamma_1, \delta_1; \gamma_2^{(0)}, \delta_2^{(0)}; \Gamma, \Lambda) \equiv W(\alpha, \beta; A, B)$ .

According to classical results (see, e. g., [29]),

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_1 + i\gamma_2^{(0)}, \delta_1 + i\delta_2^{(0)}) &= \\ = \iint_{\Gamma^2 + \Delta^2 < 1} \tilde{W}(\gamma_1, \delta_1; \gamma_2^{(0)}, \delta_2^{(0)}; \Gamma, \Delta) N(\Gamma + i\gamma_2^{(0)}, \Delta + i\delta_2^{(0)}) d\Gamma d\Delta. \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

The integration has to be carried out over a circle  $\Gamma^2 + \Delta^2 \leq 1$ , in the plane  $\gamma_2 = \gamma_2^{(0)}$ ,  $\delta_2 = \delta_2^{(0)}$ . The expression (5.4.16) can be used in the supersonic case. We wish, however, to stress that in the subsonic case, the integration domain  $K$  lies in the plane of the variables of the differential equation  $\gamma_1, \delta_1$ , while in the supersonic case,  $K$  lies in the plane which is perpendicular to  $\gamma_2$  and  $\delta_2$  of the equation.

### 5. Determination of $\Phi^{(1)}$ in $N_\mu$ belonging entirely to the subsonic or supersonic region.

In this section, we shall apply the formulas derived in section V. 4 to our specific case. Since the explicit expressions for  $q$  and  $\theta$  in terms of the variables  $\alpha$  and  $\beta$  are rather involved, it is convenient to rewrite the formulas of V. 4, in terms of  $q$  and  $\theta$ . This will form the main content of the present section.

In (5.4.2), (5.4.3), the function  $\Lambda(q)$  has been introduced. In the following, we shall need the inverse function  $\Omega(\Lambda)$ ,

$$q = \Omega(\Lambda), \quad (5.5.1)$$

or, even more,

$$q = \Omega(\Lambda_1), \quad \Lambda_1 + \Lambda + i\lambda. \quad (5.5.1a)$$

The function  $\Omega$  is a function of a complex variable  $\Lambda_1$ . In the present application,  $\Lambda_1$  is real in the supersonic region (i. e.,  $\Lambda_1 \equiv \Lambda$ ), and purely imaginary in the subsonic region ( $\Lambda_1 \equiv i\lambda$ ); i. e.,  $\lambda \equiv 0$ , for  $M > 1$ , and  $\Lambda \equiv 0$ , for  $M < 1$ . We note, however, that in our treatment we need the values of  $\Omega$  for complex values.  $\Omega(\Lambda_1)$  can be represented in the form of power series. In the subsonic case, the power series of

$$T = [\gamma \hat{q}^2 - (1 + \gamma) q^2]^{1/2} [\gamma (\hat{q}^2 - q^2)]^{-1/2}, \quad (5.5.2)$$

and  $T^{-1}$  in terms of  $\exp(2\lambda)$  have been given in [4, pp. 49, 75, 76].

We note that tables for  $\Omega(\Lambda_1)$  are available for the subsonic region, i. e., for  $\Lambda_1$  purely imaginary.

In the neighborhood of the point  $\lambda = 0$ , for  $\gamma = 0.2$  ( $k = 1.4$ ), a formal computation yields the representation

$$\lambda = c_1 T + c_3 T^3 + \dots, \quad (5.5.3)$$

$$T = d_1 \mathfrak{H} + d_3 \mathfrak{H}^3 + \dots, \quad (5.5.4)$$

where  $\mathfrak{H} = (-3.6\lambda)^{1/3}$  and the  $c_n$  and  $d_n$  are given in the table 5.5.1. We assume in the following that tables for the  $\Omega(\Lambda_1)$  for complex values of the argument  $\Lambda_1$  are available.

Let us substitute into the expressions (5.4.9), (5.4.10) and (5.4.12), the variables  $q$  and  $\theta$ . If

$$G(q) = \left( \frac{1}{2} \right) \frac{\Lambda_1''(q) q^2 - [q \Lambda_1'(q)]^3}{1 - \frac{q^2}{a^2} - [\Lambda_1'(q)]^2 q^2}, \quad (5.5.5)$$

\* S. Bergman: On supersonic and partially supersonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1096 (1946).

then we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(q, q'; \theta, \Gamma; \lambda^{(0)}, \theta_2^{(0)}) &= \\ = \left(\frac{1}{2}\right) &\left\{ \exp \left[ 2 \int_{\sigma=\Omega(i\Lambda-\lambda^{(0)})}^{\sigma=\Omega(i\Lambda-\lambda^{(0)})} G(\sigma) A_1'(\sigma) d\sigma \right] + \right. \\ &+ \exp \left[ 2 \int_{\sigma=\Omega(i\Lambda-\lambda^{(0)})}^{\sigma=\Omega(i\Lambda+i\Delta-i\theta_1-2\lambda^{(0)})} G(\sigma) A_1'(\sigma) d\sigma \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Here and in the following,  $A_1 \equiv A_1(q)$ ,  $\Delta \equiv \Delta(q')$ . Let

$$T(\Lambda, \lambda^{(0)}, \theta_1, \theta_2^{(0)}, \Gamma, \Delta) = \frac{i[\Lambda(\Gamma + i\theta_2^{(0)}) + i\lambda^{(0)}(\theta_1 - \Gamma) - \Delta(\theta_1 + i\theta_2^{(0)})]}{(\Gamma - \theta_1)}. \quad (5.5.7)$$

Then

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{n+1}(q, q'; \theta_1, \Gamma; \lambda^{(0)}, \theta_2^{(0)}) &= \int_{\vartheta_1}^{\theta_2} \int_{A_1^{(1)}(\vartheta)}^{A_1^{(2)}(\vartheta)} + \int_{\vartheta_1}^{\theta_3} \int_{A_1^{(3)}(\vartheta)}^{A_1^{(1)}(\vartheta)} + \int_{\vartheta_3}^{\theta_4} \int_{A_1^{(4)}(\vartheta)}^{A_1^{(1)}(\vartheta)} + \int_{\vartheta_2}^{\theta_4} \int_{A_1^{(1)}(\vartheta)}^{A_1^{(5)}(\vartheta)} \\ &- \frac{A_1''(q_1) q_1^2}{1 - \frac{q_1^2}{a_1^2} - [A_1'(q_1)]^2 q_1^2} \frac{\partial U_n}{\partial q_1} dq_1 d\vartheta_1, \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

where

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \theta_1 + i\theta_2^{(0)}, & A_1^{(1)}(\vartheta) &= T - i \frac{\Lambda - \Delta}{\Gamma - \theta_1} \vartheta, \\ \vartheta_2 &= \frac{\theta_1 + \Gamma}{2} + i\theta_2^{(0)} + i \left( \frac{\Lambda - \Delta}{2} \right), & A_1^{(2)}(\vartheta) &= \theta_1 + i\theta_2^{(0)} + i(\Lambda - i\lambda^{(0)}) - \vartheta, \\ \vartheta_3 &= \frac{\theta_1 + \Gamma}{2} + i\theta_2^{(0)} - i \left( \frac{\Lambda - \Delta}{2} \right), & A_1^{(3)}(\vartheta) &= \vartheta - \theta_1 - i\theta_2^{(0)} + i(\Lambda - i\lambda^{(0)}), \\ \vartheta_4 &= \Gamma + i\theta_2^{(0)}, & A_1^{(4)}(\vartheta) &= \Gamma + i\theta_2^{(0)} + i(\Lambda - i\lambda^{(0)}) - \vartheta, \\ && A_1^{(5)}(\vartheta) &= \vartheta - \Gamma - i\theta_2^{(0)} + i(\Lambda - i\lambda^{(0)}). \end{aligned}$$

Further,

$$\tilde{V}_0 = \frac{i(\Lambda - \Delta) \left\{ \frac{A_1''(q) q^2 U - (q A_1'(q))^3 U}{1 - \frac{q^2}{a^2} - [A_1'(q)]^2 q^2} - \frac{U_q}{A_1'(q)} \right\} + (\Gamma - \theta_1) U_\theta}{[(\Gamma - \theta_1)^2 + (\Delta - \Lambda)^2]}, \quad (5.5.9)$$

and  $\tilde{V}_{n+1}$  follows the law of (5.5.8).

We then get

$$\begin{aligned} \tilde{W}(q, q'; \theta_1, \Gamma; \lambda^{(0)}, \theta_2^{(0)}) &= \\ = \tilde{U}(q, q'; \theta_1, \Gamma; \lambda^{(0)}, \theta_2^{(0)}) \log &[(\Gamma - \theta_1)^2 + (\Delta - \Lambda)^2] + \tilde{V}(q, q'; \theta_1, \Gamma; \lambda^{(0)}, \theta_2^{(0)}). \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

In order to obtain the solution of the non-homogeneous equation (5.3.1), where  $N_0 = N_0(\Phi^{(0)})$ , in a neighborhood  $N_\mu$  which lies completely in a sub- or a supersonic region, we apply the method of fundamental solutions, and according to (5.4.16), we write

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \frac{1}{2} \int \int W(q, q'; \theta_1, \Gamma; \lambda^{(0)}, \theta_2^{(0)}) \cdot \\ &\cdot G(q') A_1'(q') [A_1''(q') - q' (A_1'(q'))^3]^{-1} dq' d\Gamma + \Phi_1^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

where  $N_0(\Phi^{(0)})$ , is considered as a function of  $q'$  and  $\Gamma$  rather than  $q$  and  $\theta$ . Here,  $\Phi_1^{(0)}$  is again an arbitrary solution.

By the procedure described in sections V. 3 and V. 4, we can, starting from a solution  $\Phi^{(0)}$  of an axially symmetric flow, determine in every neighborhood  $N_\mu$  a solution, say  $\Phi_\mu^{(1)}$ , of equation (5.1.5) for  $n = 1$ . As we stressed before, in doing this we can use tables of functions (5.5.5), (5.5.6), (5.5.7), (5.5.8), etc., and expressions (5.3.9), (5.3.15), (5.3.18), which can be computed once and for all. We remind the reader that in every  $N_\mu$  the function  $N(\Phi^{(0)})$  is replaced by  $N_0(\Phi^{(0)})$ , see (5.1.7), and that naturally  $c_\mu = \frac{1}{2}(\Phi_{v\max}^{(0)} + \Phi_{v\min}^{(0)})$  will change from region to region. On the other hand, the tables mentioned above can be prepared for  $c = 1$ , and the values obtained from the tables have to be divided by  $c_\mu$ .

Each of the solutions  $\Phi_\mu^{(1)}$  involves an arbitrary function  $\Phi_\mu^{(0)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X_\nu^{(\mu)} q^{|\nu|} e^{i\nu\theta} F_{|\nu|}$  [see (5.2.9)]. We note that in (5.2.9), the symbol  $B_\nu$  appears instead of  $X_\nu^{(\mu)}$ , and we wish to indicate how to determine the constants  $X_\nu^{(\mu)}$  in order that the solution obtained in this manner will represent but one solution in the whole domain  $N = \sum_\mu N_\mu$  in which  $\Phi^{(0)}$  has originally been defined.

We assume here that we have only one domain  $N_\mu$ , say  $N_1$ , which lies in the transonic region, and the remaining  $N_\mu$ , say  $N_2, N_3, N_4, \dots$ , belonging to the supersonic region. Since we wish to determine a solution of the axially symmetric flow which differs as little as possible from the plane solution  $\Phi^{(0)}$ , we determine the  $X_\nu^{(1)}$  in such a way that

$$\int \int_{N_1} [\Phi_1^{(0)} - \Phi_1^{(1)}]^2 dq d\theta = \min. \quad (5.5.12)$$

This condition permits us to determine the unknown  $X_\nu^{(1)}$ . Let us denote (5.3.10) into which  $X_\nu^{(1)}$  have been substituted by  $\Phi_1^{(1)}$ . Let us denote the function obtained by  $\Phi_1^{(0)} + \Phi_1^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$ . The function  $\varphi_1^{(1)}$  and its derivative assume certain values on the line  $AB$  of intersection  $N_1$  and  $N_2$ , and now we determine the constants  $X_\nu^{(2)}$  in the solution  $\Phi_2^{(1)}$  so that on the segment  $AB$  the obtained value of  $\varphi_2^{(1)} = \Phi_2^{(0)} + \Phi_2^{(1)}$  and its derivative differ as little from  $(\Phi^{(1)})$  and its derivatives as possible. This procedure can be continued through all  $N_\mu$  so that we get a solution  $\varphi^{(1)}$  in the whole domain. We should like to note that if the domain involves neighborhoods  $N$  belonging to the subsonic region, we can determine the constants  $X_\nu^{(\mu)}$  by using the method of analytic continuation, which we shall not discuss in detail at this time.

The second approximation  $\varphi^{(2)}$  can be obtained, in principle, in the same manner as  $\varphi^{(1)}$ . We note, however, that presumably in most instances it will be sufficient to determine  $\varphi^{(1)}$ .

## 6. General remarks.

We described above a method of starting from a given solution of (5.1.3) to obtain functions which can be considered as approximations of (5.1.2). Every  $\Phi_\mu^{(n)}$  can be inserted into (5.1.2); we obtain then a non-homogeneous equation

$$L(\Phi^{(n)}) - N(\Phi^{(n)}) = M(u, v), \quad (5.6.1)$$

and from the magnitude of  $M(u, v)$ , one can make some conclusions about the accuracy of the approximation in every  $N_\mu$ .

On the other hand, it is of interest to give at least some sufficient criteria when the  $\Phi^{(n)}$  converge, as  $n \rightarrow \infty$ , to the solution of (5.1.2). A discussion of this subject

is beyond the scope of the present work, and the reader interested in this item may refer to Bergman's original paper<sup>5</sup>.

#### Part IV. Singularities.

##### 1. General remarks.

As mentioned above, singularities play an important role in hodograph transformations. In a brief résumé of Bergman's method given in the present work, it is impossible to discuss all the details and items on the subject of singularities. Hence, below only general and more important features will be briefly outlined. A reader, advanced in mathematics, may find more details in the original literature, particularly in<sup>6</sup>.

##### 2. Properties of Bergman's operator in the subsonic range.

It is obvious that investigations in fluid dynamics require, in addition to the study of regular solutions, the investigation of singularities, for example, sources, sinks, vortices, doublets, and so on. Since, further, the image in the hodograph (or an allied) plane of a flow pattern is not necessarily uni-valent (uni-valent functions are sometimes called schlicht functions) various aerodynamical problems lead to the study of branch points as well as to the study of the corresponding Riemann surfaces.

As mentioned in previous chapters we have several procedures for generating the functions  $\Phi$  and  $\Psi$  in compressible fluid flow. Chaplygin, who introduced the hodograph method into the theory of compressible fluid, applied the method of separation of variables. If, in the power series development for the stream function of an incompressible fluid, the powers of the speed,  $q$ , are replaced by certain hypergeometric functions of  $q$ , then, as Chaplygin has shown, the series obtained in this manner is a solution of the compressibility equation. We designate this procedure as the Chaplygin operator,  $P_c$ , sometimes denoted as  $P_1$ . In<sup>7</sup> and<sup>8</sup> Bergman introduced a new operator which generates solutions  $\Phi$  and  $\Psi$  of the compressibility equations. This is defined in general as the operator  $P_B$  or  $P_2$ .  $P_B$  can obviously be applied to finite sums and in some cases to infinite ones, producing potentials and stream functions of a compressible fluid flow. As mentioned above, in a joint investigation, Bers and Gelbart<sup>9</sup>, independently of Bergman, found the same operator, which they applied in<sup>9</sup>. They term the functions obtained  $\Sigma$ -monogenic.

The operator  $P_C$  and  $P_B$  can be applied only to a power series development of an analytic function of a complex variable. They transform these series into potential

<sup>5</sup> S. Bergman: Determination of axially symmetric flow patterns of a compressible fluid. J. Math. Physics **29**, 133—145 (1950).

<sup>6</sup> G. S. S. Ludford: The behavior at infinity of the potential function of the flow of a perfect gas in two dimensions. Report 23a, Nav. Res. Contr. N5ori 76/XVI NR 043 046, Harvard Univ. (1950). — Two notes on the singularities of a compressible flow in the pseudo-logarithmic plane. Report 23b, Nav. Res. Contr. N5ori 76/XVI NR 043 046, Harvard Univ. (1950). — The behavior at infinity of the potential function of a two-dimensional subsonic compressible flow. Report 23, Nav. Res. Contr. N5ori 76/XVI NR 043 046, Harvard Univ., J. Math. Physics **30**, (3), 117—130 (1951).

<sup>7</sup> S. Bergman: The hodograph method in the theory of compressible fluids. Supplement to "Fluid Dynamics" by R. v. Mises and K. O. Friedrichs, Brown University (1941/42).

<sup>8</sup> S. Bergman: A formula for the stream function of certain flows. Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. **29**, 276—281 (1943).

<sup>9</sup> L. Bers and A. Gelbart: On a class of differential equations in mechanics of continua. Quart. Appl. Math. **1**, 168—188 (1943). — On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **56**, No. 1, 67—93 (1944).

and stream functions of both subsonic and supersonic flows. The potential and stream function of a supersonic flow each satisfy an equation of hyperbolic type. Thus  $P_C$  and  $P_B$  transform solutions of an equation of elliptic type (Laplace's equation) into solutions of a hyperbolic one. It is well known that the solutions of both equations have a quite different character, and therefore these operators cannot preserve various properties of the functions upon which they act.

Operators  $P_C$  and  $P_B$  can be applied only to functions which in the hodograph plane are defined in a circle with the center at the origin. Often we are interested in considering stream functions in domains different from circles. The methods for analytic continuation of solutions obtained in this manner are studied comparatively little. As is known, a power series is defined only for a certain value of the independent variable, and hence is convergent inside the circle with the center at the origin of radius equal to that value.

Moreover, complex potentials of an incompressible fluid flow have branch points, poles and logarithmic singularities, around points other than the origin, in the hodograph plane.

Operators, described so thoroughly in the present work, to be denoted henceforth as  $P_k$ , or  $P_{3,k}$ ,  $k = 1, 2$  (operators of the first and second kind), when specialized to the case of functions  $\Phi$  and  $\Psi$  which satisfy the compressibility equations, have the advantage that they can be applied directly to functions (and not only to their power series developments), and they generate solutions which are defined in an arbitrary simply-connected domain (and not necessarily in a circle with the center at the origin, which is a domain of convergence for a power series).

These operators generate solutions which are defined in any simply-connected domain which includes the origin. They can easily be extended so as to act on functions possessing the singularities of various types around points other than the origin, in the hodograph plane.

The operators  $P_{3,k}$  (or  $P_k$ ) transform analytic functions of a complex variable into stream functions or potential functions of subsonic flows, and differentiable functions of one real variable into stream functions of supersonic flows, in both cases preserving many properties of the functions to which the operator has been applied, thus serving as a useful tool in the investigation of flow patterns of a compressible fluid. In contrast to operators of type  $P_{3,k}$ , which have been introduced in order to "translate" properties of solutions of simpler equations into properties of more complicated ones, the operators  $P_C$  and  $P_B$  (denoted sometimes as  $P_1$  and  $P_2$ ) can be used only in a few cases as a tool for investigation of the properties of the functions which they generate.

It should be indicated that by using the Chaplygin operator  $P_C$  it is possible to obtain various important types of singularities of supersonic flows and various singularities, at stagnation points. On the other hand, certain singularities, which can be obtained easily by using Bergman's operator cannot be directly obtained by Chaplygin's method. If we wish to represent these functions in a larger domain using Chaplygin's hypergeometric functions, we need several series developments, each of which represents the function in another part of the neighborhood of the singular point. It should be stressed that in considering the potentials,  $\Phi$ , and stream functions,  $\Psi$ , there exists a basic difference between the incompressible and compressible fluid case: In the first case an analytic function  $f = \Phi + i\Psi$  of a complex variable can be interpreted as a flow of an incompressible fluid, the flow being in general defined in the whole physical  $(x, y)$ -plane or the logarithmic  $(\lambda, \theta)$ -plane,  $\lambda = \log q$ , that is, for all values of  $\lambda$  and  $\theta$ . In the second case, the functions defined on Riemann surfaces

arise in a quite natural manner, representing flow in the physical plane which has physical significance. But if we limit ourselves to the subsonic case, and attempt to develop in the  $(\lambda, \theta)$ -plane a theory of compressible flows analogous to the theory of analytic functions of a complex variable, and in particular to develop an analogue to the theory of algebraic functions and their integrals, then  $\Phi$  and  $\Psi$  are defined only for  $\lambda < 0$ . To the value  $\lambda = 0$ , there corresponds  $M = 1$ . For  $M > 1$  the flow becomes supersonic, the equations for  $\Phi$  and  $\Psi$  become hyperbolic, and the functions have basically different properties. As mentioned and used in previous chapters, if one wishes to apply operators to the flows which are partially subsonic and partially supersonic, it is useful to introduce as the class of functions to which the operator is to be applied, functions of  $Z = \lambda + i\theta$ , or  $\bar{Z} = \lambda - i\theta$ , defined in the  $(\lambda, 0)$ -plane or  $(M, \theta)$ -plane. For  $M < 1$ ,  $Z$  is complex, and for  $M > 1$  it becomes real.

As has been shown in<sup>10</sup>, the operators  $P_{3,k}$ ,  $k = 1, 2$ , preserve the location of the singular points as well as the order of infinity. They transform branch points of analytic functions of a complex variable into branch points of the same order of functions satisfying the linear differential equations, so that the operator  $P_{3,k}$  can be used successfully for generating and investigating these singularities. On the other hand, the operator  $P_{3,k}$  when applied to analytic functions  $g(Z)$  of a complex variable which posses a pole, yields solutions of differential equations which are infinite of the same order as  $g(Z)$  and at the same point, but which are no longer single-valued. If we apply the operator  $P_{3,k}$  to functions with logarithmic singularity whose real part is single-valued, we obtain functions whose real as well as imaginary parts are multi-valued. On the other hand, in connection with the transition to the physical plane the equation of single-valuedness of at least one of the quantities  $\Phi$  or  $\Psi$  is of great importance, and therefore the question arises of defining procedures which generate real solutions of the compressibility equations which are logarithmic or infinite of the  $n$ -th order and single-valued. Briefly, it is convenient to use operators  $P_{3,k}$  only in the case of branch points, defining the correspondence in the case of poles and logarithmic singularities in a different way.

Each of the operators, mentioned above, can be interpreted as a correspondence rule which associates with the complex potential of an incompressible fluid flow, defined in a domain  $B$ , a stream function of a compressible fluid flow which is defined in a domain  $B'$ . All three operators act primarily on functions which are regular in the domain in which they are considered, and they produce solutions which are regular in the domain in which they are defined.

It is natural to require that, insofar as possible, the stream functions and the potential functions of compressible fluid flows behave in the pseudo-logarithmic plane at singular points in the same manner as the corresponding functions for incompressible fluids in the logarithmic plane; that is, they become infinite of the same order, the geometrical structure of the stream lines and potential lines in a sufficiently small neighborhood of the singularity is essentially the same, and so on.

Let us now explain why single-valuedness of at least one of the components (that is, of the potential or stream function) is of importance for our purposes. Poles and logarithmic singularities in the logarithmic plane are, as a rule, images of doublets, vortices, sinks or sources at infinity in the physical plane. It is natural to require for compressible fluids that at infinity the speed is constant and that the motion has the same character as in the case of an incompressible fluid. If the potential or the stream function is known in the pseudo-logarithmic plane, we can come back

<sup>10</sup> S. Bergman: Certain classes of analytic functions of two real variables and their properties. Trans. Amer. Math. Soc. 57, 299—331 (1945).

to the physical plane by using known expressions for  $x$  and  $y$ , cited in previous sections. It follows from those equations, that if the derivatives of at least one of the functions,  $\Phi$  or  $\Psi$ , are single-valued, then, if we move around the singular point, the functions  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  can each increase at most by a constant, say  $X$ ,  $Y$ . In most cases we have at infinity a linear combination with constant coefficients of these singularities, and the constants have to be so chosen that the quantities  $X$  and  $Y$  vanish, and therefore  $x(u, v)$  and  $y(u, v)$  are single-valued. This is exactly the case for an incompressible fluid. If this property were not preserved, the flow would completely change its character. Indeed, suppose that  $x(u, v)$  and  $y(u, v)$  are multi-valued: then the functions  $u(x, y)$ , and  $v(x, y)$  are periodic, that is, in the physical plane every value  $u, v$ , is assumed infinitely often. The question whether other types of singularities—in particular those for which both components are multi-valued—are of interest in hydrodynamical applications, remains open. The first step in answering this question would consist in studying the behavior of flow patterns in the logarithmic and physical planes in the neighborhood of these singularities.

### 3. The behavior of certain types of flows in the case of an incompressible fluid.

Following the line of our approach, that is, applying the principle of correspondence between incompressible and compressible fluid planes described in previous sections, we first have to describe the behavior in the logarithmic plane of various types of flows of an incompressible fluid, and in particular those possessing singularities such as sinks, sources, vortices, and so on.

Let us consider the flow of an incompressible fluid around a closed curve, a profile, say, and let us assume that neither the velocity nor the circulation vanishes at infinity. The complex potential in the physical ( $z$ -plane) plane may be expressed for  $|z|$  sufficiently large, in the form

$$w(z) = \vec{q}_0 z + m \log z + \sum_1^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (6.3.1)$$

$$\vec{q}_0 \neq 0, \quad m \neq 0,$$

where  $\vec{q}_0$  is the velocity vector at infinity and the real constant  $m/i$  ( $m$  is an imaginary quantity) is the strength of the vortex at infinity. For the velocity vector  $\vec{q}$  we obtain by differentiation with respect to  $z$

$$\vec{q}(z) = \vec{q}_0 + m/z - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (6.3.2)$$

The expression for the complex potential in the logarithmic plane is<sup>11</sup>

$$W_1(\tilde{Z}) = m [ - (\tilde{\bar{Z}} - \tilde{\bar{Z}}_0) - \log i(\tilde{\bar{Z}} - \tilde{\bar{Z}}_0) ] \quad (6.3.3)$$

$$+ \text{Power series in } i(\tilde{\bar{Z}} - \tilde{\bar{Z}}_0),$$

where  $\tilde{Z} = \tilde{\lambda} + i\theta$ ,  $\tilde{\lambda} = \log q$ ,  $\tilde{Z}_0 = \tilde{\lambda}_0 + i\theta_0$ ,  $\tilde{\lambda}_0 = \log q_0$ . The independent complex variable  $\tilde{Z}$  may also be assumed to be equal to  $\tilde{\bar{Z}} = \tilde{\bar{\lambda}} - i\theta$ ; theoretically this change has no effect upon the considerations presented below.

In the most general case we can derive the stream function in a form:

$$\Psi^+ = \mu_0^{(1)} \Psi^{(1, 1)} + \mu_0^{(2)} \Psi^{(1, 2)} + \mu_0^{(3)} \Psi^{(L, 1)} + \mu_0^{(4)} \Psi^{(L, 2)} + \Psi_1.$$

If there is only circulation in the physical plane and no source, then  $\mu_0^{(2)}$  and  $\mu_0^{(3)}$  are determined solely by the circulation. Similarly  $\mu_0^{(1)}$  and  $\mu_0^{(4)}$  are determined solely by the source in the physical plane. This means that  $\Psi^+$  splits into two pairs of singularities  $(\Psi^{(1,1)}, \Psi^{(L,2)})$  and  $(\Psi^{(1,2)}, \Psi^{(L,1)})$ . The first pair is absent if there is no source in the physical plane, and the second if there is no circulation. In case there are both source and circulation, all the terms in (6.3.4) must be preserved. Thus we have:

- (1)  $(q_0, \theta_0)$  determines location of singularities in pseudo-logarithmic plane,
- (2) source strength alone in physical plane determines  $\mu_0^{(1)}$  and  $\mu_0^{(4)}$ ,
- (3) circulation alone in physical plane determines  $\mu_0^{(2)}$  and  $\mu_0^{(3)}$ .

Assuming the most general case, we can derive the stream function in a sufficiently small neighborhood of  $i\tilde{Z} = i\tilde{Z}_0$  in the form:

$$\Psi^+ = \sum_1^4 G_i + \dots, \quad (6.3.4)$$

$$G_1 = \mu_0^{(1)} (\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0) [(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2]^{-1}, \quad (6.3.4a)$$

etc., where the dots indicate terms which go to zero as  $\tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}_0$  and therefore can be neglected in considering the behavior of  $\Psi^+$  in a sufficiently small neighborhood of  $i\tilde{Z} = i\tilde{Z}_0$ . This point corresponds to the point at infinity in the  $z$ -plane.

Thus we see that  $W_1(\tilde{Z})$  and  $\Psi^+$  have singular points for  $i\tilde{Z} = i\tilde{Z}_0$ . One may verify that  $z = z(\theta, \tilde{\lambda}) = x + iy$ , is single-valued at the singular point  $\theta_0, \tilde{\lambda}_0$ . Following our principle of introducing (in the pseudo-logarithmic plane) for the compressible fluid, functions which have a behavior similar to that of the corresponding functions in the logarithmic plane for the incompressible fluid case, we see that we should consider flow patterns whose stream functions  $\Psi$  possess, as singularity at  $Z = Z_0$ , a linear combination of a logarithmic singularity and two independent singularities of the first order. Suppose a flow, which symbolically we shall denote as  $\bar{\gamma}(\Phi, \Psi)$  (of a compressible or incompressible fluid) has a singularity at the point  $(\lambda_0, \theta_0)$ . If at least one of the functions,  $\Phi$  or  $\Psi$ , is single-valued at this point, the singularity of  $\bar{\gamma}$  at  $(\lambda_0, \theta_0)$  will be said to be of type  $S$ . For example, the flow  $\bar{\Phi} = \log [(\theta - \theta_0)^2 + (\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0)^2]/2$ ,  $\Psi = \arctan [(\theta - \theta_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1}]$ , represents a flow possessing a singularity of type  $S$ . As we indicated above, this property plays an essential role for our purposes. In one of the following sections we shall describe a method of generating required singularities of type  $S$  in a compressible fluid flow.

#### 4. The behavior of a subsonic compressible flow at infinity.

To explain the behavior of a subsonic compressible flow at infinity, let us discuss some examples. At the point  $a = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta$ , real, of the hodograph plane which corresponds to the point  $z = (x + iy) \rightarrow \infty$  of the physical plane, the stream function has a singularity. This fact leads to the study of the singularities of functions satisfying equations in the pseudo-logarithmic plane. Let us put down the equation of a compressible fluid flow in forms

$$\Psi_{\lambda\lambda}^* + \Psi_{\theta\theta}^* + 4F_m(2\lambda)\Psi^* = 0, \quad (6.4.1)$$

or

$$\Psi_z z^* + F_m \Psi^* = 0. \quad (6.4.2)$$

A solution of the equation (6.4.2) may be written in the form

$$\Psi^*(\lambda, \theta) = Im \left[ g(\bar{Z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} Q^{(n)}(2\lambda) \cdot \int_0^{\bar{Z}} \dots \int_0^{\bar{Z}_{n-1}} g(\bar{Z}_n) d\bar{Z}_n \dots d\bar{Z}_1 \right]. \quad (6.4.3)$$

Since  $g(\bar{Z})$  is an arbitrary function we may choose it so as to fulfill certain conditions. If we know that the point corresponding to  $z \rightarrow \infty$  should be a branch point, then we choose  $g = (a - \bar{Z})^{-1/2}$  and we obtain a singularity which possesses the desired features. Indeed, let us insert  $g$  into (6.4.3) and the function

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda, \theta) = H Im & \left\{ (a - \bar{Z})^{-1/2} - Q^{(1)}[(a - \bar{Z})^{1/2} - a^{1/2}] + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} Q^{(2)}[(a - \bar{Z})^{3/2} - a^{1/2}\bar{Z} - \frac{2}{3}a^{3/2}] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

with  $\bar{Z} = \lambda - i\theta$ , is a stream function which is two-valued at point  $a$  and becomes infinite as  $(a - \bar{Z})^{-1/2}$ . If, however, the point  $a$  is not a branch point, that is, if (6.4.3) is applied to the function  $g = (a - \bar{Z})^{-1}$ , (a pole), say, then

$$\Psi(\lambda, \theta) = H Im \{ (a - \bar{Z})^{-1} + (1/2)Q^{(1)}[\log(a - \bar{Z}) - \log a] + \dots \}, \quad (6.4.5)$$

is obtained, which is not a single-valued function because  $\log(a - \bar{Z})$  is a many valued function. Similarly the function  $g = \log(a - \bar{Z})$  will originate a many-valued function. The function (6.4.5) can, however, be made one-valued by replacing the many-valued term ( $\theta = \arg \bar{Z}$ ) by its mean value (in the sheet under consideration). Clearly, this new function will no longer be an exact solution of the equation in the pseudo-logarithmic plane, but in many instances it will not differ very much from an exact solution. Naturally, this procedure may be refined.

### 5. Fundamental solutions in the subsonic range.

It is, however, of interest from a theoretical point of view to determine exact solutions of (6.4.2) which are single-valued and have a logarithmic singularity at point  $a$ . Clearly, it is sufficient to find functions for equation (6.4.2) which possess a logarithmic singularity. A function

$$\begin{aligned} W^*(\lambda, \theta; \lambda_0, \theta_0) &= W(Z, \bar{Z}; Z_0, \bar{Z}_0) = \\ &= A(Z, \bar{Z}; Z_0, \bar{Z}_0) \log |\bar{Z} - \bar{Z}_0| + B(Z, \bar{Z}; Z_0, \bar{Z}_0), \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

which considered as a function of  $Z, \bar{Z}$ , satisfies equation (6.4.2) in the whole plane, except at the point  $\bar{Z} = \bar{Z}_0$ , is termed a "fundamental solution" of equation (6.4.2) with the affix at  $\bar{Z} = \bar{Z}_0$ . Then, clearly,  $\Psi = W(Z, \bar{Z}; a, \bar{a})$  represents a desired stream function with a singularity at  $\bar{Z}_0 = a$ . The corresponding flow can be said to have a pseudo-cortex (we may also call it a flow with a "vortex-like" singularity at  $\lambda_0, \theta_0$ ). The names "vortex-like", "source-like", etc., are used although there is no direct relation between a source-like singularity and a source in the physical plane. In the case of an incompressible fluid (and in the physical plane) the stream function of a vortex flow is given by the expression  $m \log(z - z_0)$ , and in the case of a source the potential function is given by  $m \log(z - z_0)$ ,  $m$  being a constant. We note that in general  $A$  and  $B$  are not analytic functions of one complex variable  $Z$  (or  $Z_0$ ). In order to emphasize this, they are often denoted as  $A(Z, \bar{Z}; Z_0, \bar{Z}_0)$ ,  $B(Z, \bar{Z}; Z_0, \bar{Z}_0)$ , respectively.

In order to find the functions  $A$  and  $B$  a new variable will be introduced, namely

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z} - \bar{Z}_0. \quad (6.5.2)$$

Equation (6.4.2) then becomes

$$\Psi_{Z_1 \bar{Z}_1}^* + F_m \Psi^*(Z_1 + Z_0, \bar{Z}_1 + \bar{Z}_0) = 0. \quad (6.5.3.)$$

A fundamental solution of (6.5.3) with the affix at  $\bar{Z}_1 = 0$ , will be a fundamental solution of (6.4.2) with the affix at  $\bar{Z} = \bar{Z}_0$ . The functions  $A$  and  $B$  are given by the equations:

$$A = 1 - \int_0^{Z_1} \int_0^{\bar{Z}_1} F_m dZ_2 d\bar{Z}_2 + \int_0^{Z_1} \int_0^{\bar{Z}_1} F_m \left[ \int_0^{Z_2} \int_0^{\bar{Z}_2} F_m dZ_3 d\bar{Z}_3 \right] dZ_2 d\bar{Z}_2 + \dots, \quad (6.5.4)$$

$$B = \int_0^{Z_1} \int_0^{\bar{Z}_1} G dZ_2 d\bar{Z}_2 - \int_0^{Z_1} \int_0^{\bar{Z}_1} F_m \left[ \int_0^{Z_2} \int_0^{\bar{Z}_2} G dZ_3 d\bar{Z}_3 \right] dZ_2 d\bar{Z}_2 + \dots, \quad (6.5.5)$$

$$G = (A_{\bar{Z}_1}/Z_1) + A_{Z_1}/\bar{Z}_1. \quad (6.5.6)$$

Not only the function  $W$  (6.5.1) satisfies equation (6.4.2); the expression

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} = & A_1 (\theta - \theta_0) [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2]^{-1/2} + \\ & + A_2 \log [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2] + A_3, \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

where  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , are entire functions, is also a solution of that equation.

In the case where the pressure-density relation is of the (simplified) form  $p = A + B/C$ , the functions  $W^*$  and  $\partial W^*/\partial \theta$  are

$$(1/2) \log [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2], \quad (6.5.8)$$

and

$$(\theta - \theta_0) [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2]^{-1},$$

respectively. It is noted that in this particular case new singularities are obtained by differentiating  $W^*$  with respect to  $\lambda$ .

Let us differentiate  $\Psi = \Psi^{(L)} = W(Z, \bar{Z}; Z_0, \bar{Z}_0)$  with respect to the real and imaginary parts of the parameter  $Z$ . We obtain single-valued functions  $\Psi^{(1,1)}$  and  $\Psi^{(1,2)}$  with an infinity of the first order. Flow patterns generated by  $\Psi^{(L)}$ ,  $\Psi^{(1,1)}$ ,  $\Psi^{(1,2)}$  have a simple physical meaning:  $\Psi^{(L)}$  yields a vortex at infinity (in the physical plane),  $\Psi^{(1,1)}$ ,  $\Psi^{(1,2)}$  yield components of a doublet at infinity.

There are instances where it is more convenient to operate with the potential function  $\Phi$ , rather than with the stream function  $\Psi$ . Functions  $\Phi$  and  $\Psi$  satisfy the system of equations

$$\Phi_\theta = \Psi_H, \quad l(H) \Psi_\theta = -\Phi_H. \quad (6.5.10)$$

Introducing the variable  $\lambda$ , we obtain

$$\Phi_\theta = \varrho^{-1} (1 - M^2)^{1/2} \Psi_\lambda, \quad \varrho^{-1} (1 - M^2)^{1/2} \Psi_\theta = -\Phi_\lambda. \quad (6.5.11)$$

Differentiating the first equation (6.5.11) with respect to  $\theta$  and the second with respect to  $\lambda$ , and applying a few transformations yields the equation

$$\Phi_{\lambda\lambda} + \Phi_{\theta\theta} - 4N\Phi_\lambda \equiv 4[\Phi_{ZZ} - N\Phi_Z] = 0, \quad (6.5.12)$$

$$Z = \lambda + i\theta, \quad \bar{Z} = \lambda - i\theta, \quad (6.5.13)$$

$$N = (-1/8)(k+1)M^4(1-M^2) - 3/2. \quad (6.5.14)$$

Equation (6.5.12) possesses a fundamental solution of the form (6.5.1); in this case a flow with a "source-like" singularity is obtained. In the physical plane it yields a source (or sink) at infinity.

### 6. Modified integral operator in the subsonic range.

As mentioned above, in connection with the transition to the physical plane, it is of importance to have singularities for which at least one of the functions  $\Psi$  (stream function) or  $\Phi$  (potential function) is single-valued at the singular point. Sometimes it is necessary to modify the operator described in previous chapters. If we have a function  $g$  (for example, a complex potential) which possesses poles and logarithmic singularities, we decompose it writing

$$g = g^* + \sum_{k=1}^m A_k (Z - Z_k)^{-\nu_k} + \sum_{k=m}^n A_k \log(Z - Z_k), \quad (6.6.1)$$

where  $A_k$  are constants and the  $\nu_k$  are positive integers. The function  $g^*$  possesses as its only singularities algebraic branch points.

Consider the equation (6.4.2). The integral operator may be chosen in the form of equation (6.4.3). Applying the integral operator to the first part of (6.6.1), we obtain a solution of (6.4.2), say  $\Psi_1 = I m [p(g^*)]$ . By introducing the fundamental solutions  $\Psi^{(L)} = W$  in form of (6.5.1), we obtain solutions of (6.4.2) which have the same behavior as  $\log(\bar{Z} - \bar{Z}_0)$ . Adding to  $\Psi_1$  the functions with singularities described above we obtain a solution of the compressibility equation, possessing the same characteristic features as  $g$ . We shall refer to this procedure for determining stream functions of a compressible fluid as the "modified integral operator". In the case of non-symmetric flow patterns with the velocity vector  $\vec{q}_0 \exp(i\theta_0)$  at infinity ( $z \rightarrow \infty$ ), we obtain as a rule the stream function (in the  $\lambda, \theta$ -plane) in the form

$$\Psi = A_0 \Psi^{(L)} + A_1 \Psi^{(1,1)} + A_2 \Psi^{(1,2)} + \Psi_1, \quad (6.6.2)$$

where  $\Psi_1 = \Psi_1(\bar{Z})$  is a function which has branch points of positive order as its only singularities, and which can be obtained by the operator from a suitably chosen function  $g^*(\bar{Z})$  of one complex variable. In the case of symmetric flow patterns the representation (6.6.2) simplifies. In the latter case we can directly apply the operator to the function

$$g(\bar{Z}) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} A (\bar{Z} - \bar{Z}_0)^{\nu/2}, \quad (6.6.3)$$

The introduction of the modified integral operator enables us to develop a theory of compressible fluid flow which in the subsonic case strongly resembles that of an incompressible fluid (when we use the hodograph method). In the following chapters a generalization of two results of the latter theory will be discussed, namely: (a) the condition that a stream function defines a flow pattern around a closed curve; and (b) a generalization of the Blasius formulas.

### 7. Subsonic compressible fluid flows with singularities of type S.

Classical methods in the theory of partial differential equations yield almost immediately two independent flows with logarithmic singularities of type S. Assuming the equations of the stream function and the velocity potential of a compressible fluid flow in  $Z$ -plane or  $i\bar{Z} = \theta + i\lambda$ -plane, one can find the two pairs of fundamental solutions of those equations in the pseudo-logarithmic plane:

$$\Psi^{(L,1)}, \quad \Psi^{(L,2)}, \quad \Phi^{(L,1)}, \quad \Phi^{(L,2)}.$$

The superscript L symbolizes that either the stream-function or the potential function has a logarithmic singularity. By means of a simple procedure, one may

show that the flows  $\bar{\gamma}^{(L,k)}$  ( $\Phi^{(L,k)}, \Psi^{(L,k)}$ ),  $k = 1, 2$ , are flows with singularities of type  $S$  and that both components  $\Phi^{(L,k)}, \Psi^{(L,k)}$  of the  $\bar{\gamma}^{(L,k)}$ ,  $s, k = 1, 2$ , are single-valued. Infinitely many new flows may be obtained from the first two linearly independent flows by a differentiation, namely

$$\bar{\gamma}^{(n,k)} \left( \frac{\partial^n \Phi^{(L,k)}}{\partial \theta^n}, \frac{\partial^n \Psi^{(L,k)}}{\partial \theta^n} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.7.1)$$

The components of those flows are derivatives of  $n$ -th order of the first potential and stream-functions, and they are infinite of  $n$ -th order at the point  $(\theta_0, \lambda_0)$ . The question may arise as to whether for some index  $n$  (and hence for all higher indices) the two flows  $\bar{\gamma}^{(n,1)}$  and  $\bar{\gamma}^{(n,2)}$  are not essentially the same: that is, whether functions  $\Psi^{(n,1)}$  and  $\Psi^{(n,2)}$  (and likewise  $\Phi^{(n,1)}$  and  $\Phi^{(n,2)}$ ) are not linearly dependent. The proof that this is not the case, as well as all the other proofs of statements cited in the present section, are given in <sup>11</sup>.

A problem of considerable interest is that of determining a flow of a compressible fluid around a given profile, or at least around a profile the shape of which approximates the given profile. Since, in many instances, by reasoning from the incompressible case, the approximate image in the hodograph  $(\lambda, \theta)$ -plane is known (the image in the logarithmic plane of an incompressible fluid flow around a profile is supposed to be used as a first approximation of the image in the  $(\lambda, \theta)$ -plane of the flow of a compressible fluid around a similar profile, it is possible to consider, instead of the above problem, the question of determining a flow for a given hodograph. The behavior at the point of the hodograph corresponding to  $z = \infty$  is prescribed. Clearly, instead of the image in the hodograph plane, the image in the  $(\lambda, \theta)$ -plane may be used. By means of formulas given in previous sections, it is possible to determine a function  $\Psi_1(\lambda, \theta)$  satisfying the equation of a compressible fluid flow which possesses the required behavior at  $z = \infty$ . Naturally,  $\Psi_1(\lambda, \theta)$  for the point  $(\lambda_\infty, \theta_\infty)$  corresponding to the point  $z = \infty$  of the physical plane, must have a singularity which satisfies the conditions indicated in section VI. 8 (below), in order that the flow in the physical plane will be a flow around a closed curve. Function  $\Psi_1(\lambda, \theta)$  is not as yet the required stream-function, since it does not assume constant values on the boundary of the domain. But it is possible to determine this function in an approximate way by means of a procedure given in <sup>12</sup>, p. 45.

## 8. The transition from the pseudo-logarithmic to the physical plane in the subsonic range.

We shall discuss below the conditions that  $\Psi(\lambda, \theta)$  defines in the physical plane a flow around a closed curve. As has been indicated above, the introduction of singularities of type  $S$  enables us to define in the pseudo-logarithmic plane, flow patterns which have in this plane a behavior similar (in the sense indicated above) to that of the flow pattern of an incompressible fluid in the logarithmic plane. The problem arises of determining the conditions that the flow defined in this manner in the pseudo-logarithmic plane will represent a flow around a closed curve in the physical plane. In the following discussion we shall present necessary and sufficient conditions to assure this.

If a flow has a singularity of type  $S$  at  $(\lambda_0, \theta_0)$  then either  $\Phi$  or  $\Psi$  is a single-valued function, and, according to the statements and equations cited in previous sections,

<sup>11</sup> S. Bergman: Two-dimensional subsonic flows of a compressible fluid and their singularities. Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 452—498 (1947).

<sup>12</sup> S. Bergman: Methods for determination and computation of flow patterns of a compressible fluid. N. A. C. A., T. N. No. 1018 (1946).

$x$  and  $y$  increase by constants if we go around the singular point  $(\lambda_0, \theta_0)$ . The constants  $X, Y$ , by which the functions  $x(\lambda, \theta)$  and  $y(\lambda, \theta)$  increase (if we move once counterclockwise around a singularity of type  $S$  of a flow  $\bar{\gamma}$ ), will be denoted by  $T$ -periods. (The letter  $T$  is suggested by the expression "transition to the physical plane.") These constants  $X, Y$ , can be determined for the flows  $\bar{\gamma}^{(L, 1)}, \bar{\gamma}^{(1, k)}$ , (for details see<sup>11</sup>). Following the principle of correspondence, explained above, we introduce stream-functions which in the pseudo-logarithmic plane have a behavior similar to that of stream-functions of an incompressible fluid in the logarithmic plane. The images of a flow of an incompressible fluid in the logarithmic plane and that of a compressible fluid in the pseudo-logarithmic plane extend in general to infinity, since at a stagnation point  $q = 0$  and therefore  $\tilde{\lambda} = \log q$  tends to  $-\infty$ . Below we shall consider only flows satisfying the following conditions:

- (a) The stagnation point (or points), if any, lies on the boundary (but not in the interior) of the flow;
- (b) the flow (that is, the stream and potential functions) possesses only a finite number of singularities (including branch points), so that for  $|Z| \geq R$  the stream-function is regular at every point of the domain (call it  $P$ );
- (c) the stream-function  $\Psi$  as well as  $\Psi_z$  and  $\Psi_{\bar{z}}$  exist and are continuous on the boundary except perhaps at a finite number of points.

Assume that the stream-function  $\Psi$  of  $\bar{\gamma}$  is defined in a (not necessarily schlicht) domain  $P$  of the pseudo-logarithmic plane and can be represented there by

$$\Psi = \mu_0^{(1)} \Psi^{(1, 1)} + \mu_0^{(2)} \Psi^{(1, 2)} + \mu_0^{(3)} \Psi^{(L, 1)} + \mu_0^{(4)} \Psi^{(L, 2)} + \Psi_1. \quad (6.8.1)$$

Assume that  $\Psi_1$  satisfies hypotheses (a), (b), (c), and that the functions  $\Psi^{(1, 1)}, \Psi^{(1, 2)},$  etc., are stream-functions possessing at the point  $\lambda_0, \theta_0$  singularities of the type described in the section VI. 7. The point  $\lambda_0, \theta_0$  corresponds to  $z \rightarrow \infty$ . Under the hypotheses (a), (b), (c) and some additional assumptions, the following theorem can be proved<sup>11</sup> and<sup>6</sup>.

Theorem. The necessary and sufficient condition in order that the stream-function (6.8.1) defined in a simply-connected domain  $P$  represents a flow in the physical plane around a closed curve is that the following equations are fulfilled (called "the consistency relations"):

$$\mu_0^{(1)} X^{(1, 1)} + \mu_0^{(2)} X^{(1, 2)} + \mu_0^{(3)} X^{(L, 1)} + \mu_0^{(4)} X^{(L, 2)} = 0, \quad (6.8.2)$$

$$\mu_0^{(1)} Y^{(1, 1)} + \mu_0^{(2)} Y^{(1, 2)} + \mu_0^{(3)} Y^{(L, 1)} + \mu_0^{(4)} Y^{(L, 2)} = 0, \quad (6.8.3)$$

$X^{(1, k)}, Y^{(1, k)}$  being  $T$ -periods of  $\gamma^{(1, k)}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $X^{(L, k)}, Y^{(L, k)}$  those of  $\bar{\gamma}^{(L, k)}$ .

We may derive another form of the conditions in order that the obstacle in the physical plane (which is formed by the image of the boundary curve  $h$  in the simply-connected domain  $H$  in the hodograph plane) be a closed curve. Assume that the stream-function  $\Psi$  defined in this domain  $H$  has a singularity at the point  $a$  (the image of  $z = \infty$ ). It is assumed that the point  $q = 0$  is not an interior point of domain  $H$ . Clearly, the necessary and sufficient condition in order that the image of  $H$  in the physical plane be single-valued is that

$$\int_l \varrho_0 \exp(i\theta) \varrho^{-1} \{[-(1 - M^2)q^{-2}\Psi_\theta + i\Psi_a q^{-1}]dq + [\Psi_a + i\Psi_\theta q^{-1}]d\theta\} = 0, \quad (6.8.4)$$

where  $l$  is any simple closed curve lying entirely in  $H + h$ . The symbol  $(H + h)$  means that at most the curve  $l$  can coincide with  $h$ . Since the integrand of (6.8.4) is a complete differential, the value of the integral does not change if  $l$  is continuously deformed without leaving  $H + h$  and without passing through the singular point  $a$ . Thus, in particular, if the boundary curve  $h$  is chosen for  $l$ , it follows that

$d\Psi = \Psi_q dq + \Psi_\theta d\theta = 0$ , that is  $d\theta = -(\Psi_q/\Psi_\theta) dq$  along  $h$ , since  $h$ , being the boundary curve of the body, must be a streamline. If this expression is inserted into (6.8.4), the condition is obtained that the image of  $h$  in the physical plane be a closed curve. Notice that  $H$  must be simply-connected.

On the other hand the relation (6.8.4) can also be written in a different form which is often more suitable for applications. Let us assume that the stream-function  $\Psi$  can be represented in the neighborhood of a (the image of  $z = \infty$ ) in the form

$$\Psi = \sum_{n=0}^k A_n W^{(n)} + \Psi_1, \quad (6.8.5)$$

where  $A_n$  are constants,  $\Psi_1$  is a function which is regular at the point  $a$  and  $W^{(n)}$  are fundamental solutions [see (6.5.1)]:

$$W^{(0)}(q, \theta; q_0, \theta_0) = W^*(\lambda, \theta; \lambda_0, \theta_0), \quad (6.8.6)$$

$$W^{(n)}(q, \theta; q_0, \theta_0) = \frac{\partial W^{(0)}(\lambda, \theta; \lambda_0, \theta_0)}{\partial \theta^n}. \quad (6.8.7)$$

With every singularity  $W^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  there may be associated a complex number

$$R(W^{(n)}) = X_n + i Y_n, \quad (6.8.8)$$

which is equal to the left-hand side of (6.8.4) with  $\Psi_\theta = W_\theta^{(n)}$  and  $\Psi_q = W_q^{(n)}$ , and where  $l$  is an arbitrary simple closed curve around  $a$ , the direction of integration being such that  $a$  always lies to the left. The alternative form of conditions (6.8.2) and (6.8.3) iss that

$$\sum_{n=0}^k A_n R(W^{(n)}) = 0. \quad (6.8.9)$$

The evaluation of the quantities  $R(W^{(n)})$  in the special case, when  $k = 1$ , is given in <sup>13</sup>.

## 9. Generalization of the Blasius formulae in the subsonic range.

As is known, the behavior of the flow at infinity determines the force and the moment acting upon a profile immersed in a fluid. As one may show, the results obtained in previous chapters enable one to obtain for the force  $F$  and the moment  $M_{z_0}$  about a given point  $z_0 = (x_0, y_0)$  the formulas analogous to those holding in the incompressible case. For an incompressible fluid these quantities are given by the formulas of Blasius:

$$F = \frac{1}{2} i \varrho_0 \int_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \quad (6.9.1)$$

$$M_{z_0} = -\operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \varrho_0 \int_C (z - z_0) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right]. \quad (6.9.2)$$

Here  $\varrho_0$  is the density of the fluid,  $w$  is the complex potential of the flow and  $C$  a control contour. Formulae (6.9.1) and (6.9.2) can be expressed in terms of the coordinates  $\tilde{\lambda}, \theta$  of the logarithmic plane. Bergman and Ludford generalized those formulas by taking into account the compressibility of the fluid.

<sup>13</sup> S. Bergman: On two-dimensional flows of compressible fluids. N. A. C. A., T. N. No. 972 (1945).

Moreover, Ludford proved the validity of the generalization of the Kutta-Joukowski formulae to the subsonic compressible case:

$$F_x = 0, \quad F_y = \rho_0 U \Gamma. \quad (6.9.3)$$

The moment  $M$  about the origin is:

$$M = \rho_0 U^2 D_2, \quad (6.9.4)$$

with  $D_2$  given in <sup>6</sup>.

#### 10. An integral formula representing a subsonic flow inside a domain in terms of its values on the boundary.

The Cauchy integral formula, cited in one of the previous sections, is one of the most powerful tools in the study of analytic functions of a complex variable. In the subsonic case there exists an analogue of this formula, which enables us to express the values of  $\Phi$  and  $\Psi$  inside a domain  $B$  of the  $(\lambda, \theta)$ -plane in terms of the values of  $\Phi$  and  $\Psi$  on the boundary of  $B$ . The following theorem will be given without the proof:

**Theorem:** Let  $\bar{\gamma}(\Phi, \Psi)$  be a flow which is regular in the bounded domain  $B$  (lying entirely within the subsonic region) whose boundary  $C$  is a simple closed curve. Then at every point  $(\lambda_0, \theta_0)$  of  $B$

$$2\pi\Phi(\lambda_0, \theta_0) = [H(2\lambda_0)]^{-1} \int_C \left[ -H^2 \Phi \frac{\partial \Phi^{(L, 2)}}{\partial n} + \Psi \frac{\partial (H^2 l^{1/2} \Phi^{(L, 2)})}{\partial s} \right] ds, \quad (6.10.1)$$

$$2\pi\Psi(\lambda_0, \theta_0) = H(2\lambda_0) \int_C \left[ -H^{-2} \Psi \frac{\partial \Psi^{(L, 1)}}{\partial n} + \Phi \frac{\partial (H^{-2} l^{-1/2} \Psi^{(L, 1)})}{\partial s} \right] ds, \quad (6.10.2)$$

where  $\partial/\partial_n$  indicates differentiation in the direction of the inward normal, and  $\Phi^{(L, 2)}$  and  $\Psi^{(L, 1)}$  are the fundamental solutions.

#### 11. A proof of an auxiliary lemma in the subsonic range.

In the following, the proof will be outlined that in the subsonic range the function  $F(2\lambda)$  can be approximated by the polynomial

$$F_m(2\lambda) = \sum_{s=0}^m \alpha_s^{(m)} \exp(2s\lambda), \quad \alpha_0^{(m)} = 0, \quad (6.11.1)$$

in every interval  $(-\infty, \lambda_0)$ ,  $\lambda_0 < 0$ , and the method of determining the  $F_m(2\lambda)$  will be indicated.

If  $2\lambda$  is replaced by  $\log X$ , then  $F[2\lambda(X)]$  is a continuous function of  $X$  in the interval  $(0, X_0)$ ,  $X_0 < 1$ , and by classical results, it is obvious that it can be approximated by a polynomial in  $X$ . It will be seen that it will not suffice merely to approximate  $F$ , but in addition to this it will be possible to require that any given number of higher derivatives of  $F$  be approximated in the interval  $(-\infty, \lambda_0)$  by the corresponding derivatives of  $F_m$ . It is, however, of interest to give a more explicit form of the approximating polynomials. This will make it possible to determine the corrections of  $Q^{(n)}$  given in previous sections on subsonic flow which have to be made in order to obtain functions  $Q^{(n)}$  corresponding to a given  $F_m$ .

If  $M$  increases steadily from 0 to 1,  $\lambda$  increases from  $-\infty$  to 0. Since the relation  $M \leftrightarrow \lambda$  is a one-to-one correspondence, to every  $\lambda_0$ ,  $\lambda_0 < 0$  there corresponds an  $M_0 = M(\lambda_0) < 1$ . Therefore, if  $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$  then  $M(\lambda) \in (0, M_0)$ . For  $M \leq M_0$ , the function

$$F = [64(1 - M^2)^3]^{-1} (k + 1) M^4 [- (3k - 1) M^4 - 4(3 - 2k) M^2 + 16], \quad (6.11.2)$$

may be approximated by a polynomial  $F_n$  of the  $(2n + 8)$ -th degree in  $M^2$ ,

$$F_n(M) = (64)^{-1} (k + 1) M^4 [- (3k - 1) M^4 - 4(3 - 2k) M^2 + 16] \cdot \\ \cdot \left[ \sum_{\nu=1}^n (\nu^{-3}) (-1)^\nu M^{2\nu} \right]. \quad (6.11.3)$$

Only a finite number of powers of  $M^2$  appears in (6.11.3). It will now be shown that  $M^2$  can be developed in the uniformly convergent series

$$M^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu X^\nu, \quad (6.11.4)$$

$$X = 2 \left[ \frac{(k+1)^{1/2} - (k-1)^{1/2}}{(k+1)^{1/2} + (k-1)^{1/2}} \right] \left( \frac{k+1}{k-1} \right)^{1/2} \exp(2\lambda), \quad (6.11.5)$$

with  $\lambda < 0$ . Instead of considering  $M^2$ , it is well to introduce

$$s = 1 - (1 - M^2)^{1/2}. \quad (6.11.6)$$

Since  $M^2 = 1 - (1 - s)^2$ , it will suffice to determine the series for  $s$ . As one may easily verify, by simple calculations one obtains

$$X = \left( \frac{s}{2-s} \right) \left\{ 2 \left( \frac{h^{-1} + 1 - s}{h^{-1} - 1 + s} \right) \left( \frac{h^{-1} - 1}{h^{-1} + 1} \right)^{1/h} \right\}, \quad (6.11.7)$$

$$h = \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^{1/2}, \quad k > 1. \quad (6.11.8)$$

It is possible to prove that the image of the area of the circle  $|s| < 1$  is a schlicht domain in the  $X$ -plane. That is, one can show (13, p. 58 and 59) that the boundary curve of the image of  $|s| < 1$  is a curve which does not intersect itself. By classical theorems of the theory of functions, the domain bounded by this curve is schlicht. Clearly, it includes in its interior the domain  $|X| < 1$ . Since the image of  $|s| < 1$  is schlicht and includes  $|X| < 1$ , the inverse functions  $s = s(X)$  is regular in  $|X| < 1$  and can be expanded in  $|X| < 1$  in the form of an infinite series

$$s(X) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu X^\nu. \quad (6.11.9)$$

With some additional proofs it is possible to show that (6.11.9) yields the required approximation.

## 12. Singularities in transonic flow.

In one of the previous sections we indicated a procedure for constructing a mixed flow (partially supersonic) around an obstacle the boundary of which is a closed curve. If the boundary is prescribed, then probably, in many instances, no solution of the problem exists. Unfortunately, no definite results in this direction are known. However, investigations of problems of similar type seem to indicate that the above is the case. Therefore the problem arises of finding necessary and sufficient conditions in order that a mixed flow pattern may exist around an obstacle. In considering this problem, two cases have to be distinguished<sup>4</sup>:

1. The behavior of the flow at infinity is completely prescribed (for example, a uniform flow with no vorticity), or,

2. the flow at infinity possesses certain properties, but any solution will be considered as admissible if its behavior at infinity is of a certain type.

The second problem is to determine when the solution is unique and, further, under what conditions it is "stable". This situation suggests considering a problem

which is much simpler mathematically (but still quite difficult), and, in certain instances, can give the type of answer desired by a research engineer, namely, the question whether to a given hodograph there exists a flow possessing the prescribed behavior at infinity. Often it will suffice to know not whether a flow pattern exists around some prescribed (in the physical plane) profile, but only whether such a flow exists with prescribed (or approximately prescribed) velocity distribution. The whole investigation may be shifted to the hodograph plane, and the problem considered as formulated above. As an example, a flow will be considered in order to determine whether to a given hodograph there corresponds some mixed flow. While, as is known in the case of a subsonic flow, it is more convenient to operate in the  $(\lambda, \theta)$ -plane (pseudo-logarithmic plane), in the case of a mixed flow it is convenient to return to the  $(H, \theta)$ -plane, since  $\lambda(M)$  becomes imaginary for  $M > 1$ . As  $\lambda$  and  $H$  are connected by the relation  $d\lambda = [l(H)]^{-1/2} dH$ ,  $l(H) = (1 - M^2) \varrho^{-2}$ , it does not present any theoretical difficulty to replace the variable  $\lambda$  by the variable  $H$ , in functions  $S_k(\lambda, \theta; \lambda_0, \theta_0)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , which are assumed to represent a pseudo-vortex and two pseudo-doublets, respectively (see section VI. 5). Thus, functions are obtained which shall be denoted by

$$T_k(H, \theta; H_0, \theta_0) = S_k(\lambda, \theta; \lambda_0, \theta_0). \quad (6.12.1)$$

Let us now assume that there exists a function which at the point  $(H_0, \theta_0)$  (which is the image of the point at infinity in the physical plane) behaves like

$$A_1 T_1(H, \theta; H_0, \theta_0) + A_2 T_2(H, \theta; H_0, \theta_0) + A_3 T_3(H, \theta; H_0, \theta_0) + R(H, \theta), \quad (6.12.2)$$

where  $R(H, \theta)$  is a regular function of  $H, \theta$ . Naturally,  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , must satisfy the conditions discussed above, in order that in the physical plane a flow around a closed curve is obtained (6.8.9). Now, the question arises whether or not a function  $R(H, \theta)$  can be found such that the expression (6.12.2) vanishes on the boundary line of the hodograph. Without going into too many details of a more advanced mathematical nature, let us note that one can find a necessary condition for the solution of this problem (for more details see<sup>4</sup>, pp. 40–44, or<sup>14</sup>).

Obviously, if the function  $\Psi(x, y)$  is to yield a flow pattern around a closed profile in the physical plane, it is necessary that

(a) the streamline  $\Psi(x, y) = 0$  (or a part of this streamline) yield a closed curve in the physical plane;

(b) that every point of the physical plane be covered at most once (that is that the mapping onto the  $(x, y)$ -plane be schlicht). It is remarked, however, that if the whole image in the  $(x, y)$ -plane is not schlicht, the flow pattern obtained may nevertheless be of physical interest since in some instance it is required to determine flow patterns covering only part of the  $(x, y)$ -plane or to use only a part of the flow pattern.

The necessary and sufficient conditions in the subsonic case that the boundary in the hodograph plane when mapped onto the physical plane yield a closed curve in the latter plane have been established in previous chapters for flow patterns that are not necessarily symmetric. In the subsonic case, the determinant of the mapping from the hodograph to the physical plane  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$  is always positive. It is therefore sufficient and necessary, in order that the mapping be schlicht, that the boundary curve in the physical plane be schlicht, and that the mapping satisfy, at infinity, certain regularity conditions which will be stated below. In some cases the schlichtness

<sup>14</sup> S. Bergman: On tables for the determination of transonic flow patterns. Hans Reissner Anniversary Volume: Contributions to Applied Mechanics. J. W. Edwards (1949).

of the boundary curve follows from the symmetry of the image in the hodograph plane and a few other conditions<sup>14</sup>. The mapping must satisfy the following conditions at infinity: As a doubly covered circle about the point  $A$  (which represents the image of infinity in the hodograph plane) shrinks to a point, its image in the inverted physical plane  $x' + i y' = (x + i y)^{-1}$  must be schlicht and also shrink to a point.

In generalizing these results to transonic flow patterns, one must be on guard against the following difficulties:

- (a) the functional determinant  $\partial(u, v)/\partial(x, y)$  is not necessarily positive,
- (b) the mixed character of the equation of flow may give rise to hyperbolic singularities which do not appear in the subsonic case.

(Eingegangen am 9. März 1954.)

## Zur Bestimmung der Trägheitskoeffizienten unsymmetrischer Rotationskörper<sup>1</sup>.

Von W. Müller, München.

Mit 5 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** In Fortsetzung einer Arbeit über die Integraldarstellung der Trägheitskoeffizienten eines Rotationskörpers wird nach Ableitung einiger allgemeiner Sätze über die erzeugenden Quell- und Dipolsysteme die vollständige Berechnung der Trägheitskoeffizienten einer besonderen Formengruppe mit Hilfe von Ellipsoid-Koordinaten durchgeführt, die eine geschlossene Lösung der vorkommenden Integrale ermöglichen. Der Vergleich mit dem Ellipsoid führt zu mehreren, auch für andere Formen verwendbaren Gesetzen.

**Summary.** In a continuation of a paper on the integral representation of the coefficient of inertia of a solid of revolution, some general theorems are derived on the generating expanding and dipole systems and the complete calculation of the coefficients of inertia is shown for a special group of forms with the aid of ellipsoid coordinates, which enable a closed solution to the integrals occurring. The comparison with the ellipsoid leads to several laws applicable also to other forms.

**Résumé.** Comme suite à un travail sur la pose de l'intégrale des coefficients d'inertie d'un solide de révolution, et après la démonstration de quelques théorèmes généraux sur les systèmes génératrices de source et bipolaire, les coefficients d'inertie d'un groupe de formes particulier sont entièrement calculés à l'aide de coordonnées ellipsoïdales qui rendent possible la solution totale des intégrales qui se présentent. La comparaison avec l'ellipsoïde mène à plusieurs lois, également applicables à d'autres formes.

### Inhalt:

1. Einleitung.
2. Ellipsoidkoordinaten.
3. Darstellung von geschlossenen Rotationskörpern.
4. Anwendung auf den Fall eines unsymmetrischen Rotationskörpers.
5. Berechnung des Trägheitskoeffizienten  $k$  der Längsbewegung.
6. Allgemeine Sätze über die Potentialfunktion der Querströmung.
7. Bestimmung einer weiteren Näherung für das Potential der Querströmung.
8. Ermittlung des Trägheitskoeffizienten  $k_2$  der Querströmung.
9. Ergebnisse der Rechnung.
10. Beziehung der Koeffizienten zu den Geschwindigkeiten.
11. Schlußbemerkung.

### I. Einleitung.

In einer vorbereitenden Arbeit<sup>2</sup> über die Hydrodynamik des Rotationskörpers, im besonderen über die Bestimmung des von den Luftkräften herrührenden instabilen

<sup>1</sup> Die vorliegende Untersuchung geht zurück auf eine frühere Zusammenarbeit mit der Firma Messerschmitt.

<sup>2</sup> Österr. Ingenieur-Arch. 8, 171 (1954).

Momentes, das in erster Linie von den auf die Längs- und Querrichtung bezogenen Trägheitskoeffizienten abhängt, habe ich zur Verdeutlichung der theoretischen Ergebnisse das Beispiel des Ellipsoids nach der Quellsenkenmethode entwickelt und dabei die Ellipsoidkoordinaten zugrunde gelegt. Im folgenden soll diese Methode einschließlich des Gebrauches der Ellipsoidkoordinaten auf andere Körper ausgedehnt werden, die eine unsymmetrische Gestalt haben, das heißt durch eine verschiedene Ausbildung von Bug und Heck gekennzeichnet sind.

Nach einigen einleitenden Bemerkungen über diese Koordinatendarstellung werden mehrere allgemeine Sätze über Quell- und Dipolsysteme entwickelt, die für den Aufbau von praktisch brauchbaren Rotationskörpern in Frage kommen. Vor allem soll hier zum erstenmal die vollständige Berechnung der Trägheitskoeffizienten einer besonderen Formengruppe durchgeführt werden, die insofern bemerkenswert ist, als die auftretenden Integrale in vollständig geschlossener Form lösbar sind. Der Vergleich der Ergebnisse mit den Werten des Ellipsoids gleicher Länge und gleichen Volumens liefert einige bisher nicht bekannte Gesetzmäßigkeiten, die als Grundlage einer Untersuchung zusammengesetzter Fälle dienen können.

## II. Ellipsoidkoordinaten.

Unter Zugrundelegung rotationssymmetrischer Anordnung bezeichnen wir die Koordinaten in einer Meridianebebene, das heißt die axiale und radiale Koordinaten in einer Meridianebebene, mit  $x$ , und wenn wir dann von einer in der Achse liegenden, von  $x = -c$  bis  $x = c$  reichenden Grundstrecke ausgehen, deren Endpunkte  $C_1$  und  $C_2$  die Brennpunkte der zugeordneten Meridianellipse sind, und die Radienvektoren von diesen Punkten nach einem beliebigen Feldpunkt mit  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnen, so sind die Ellipsoidkoordinaten definiert durch die Beziehungen

$$\zeta = \frac{r_1 + r_2}{2c}; \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c} \quad (1)$$

und die Radien  $r_1$  und  $r_2$  sowie die Koordinaten  $x$ ,  $\eta$  drücken sich dann in folgender Weise durch  $\zeta$  und  $\mu$  aus:

$$r_1 = c(\zeta + \mu); \quad r_2 = c(\zeta - \mu); \quad x = c\zeta\mu; \quad \eta = c\sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)}. \quad (2)$$

Man sieht zunächst, daß  $\zeta = \text{konst.} = \zeta_0$  bzw.  $\mu = \text{konst.} = \mu_0$  einer Ellipse bzw. Hyperbel in der Meridianebebene mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{c^2 \zeta_0^2} + \frac{\eta^2}{c^2 (\zeta_0^2 - 1)} = 1, \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{c^2 \mu_0^2} - \frac{\eta^2}{c^2 (1 - \mu_0^2)} = 1 \quad (3)$$

und den Halbachsen  $a = c\zeta_0$ ,  $b = c\sqrt{\zeta_0^2 - 1}$  bzw.  $a' = c\mu_0$ ,  $b' = c\sqrt{1 - \mu_0^2}$  entsprechen, die bei Drehung um die Achse ein Rotationsellipsoid bzw. Rotationshyperboloid ergeben. Wenn  $\zeta_0$  bzw.  $\mu_0$  alle möglichen Werte in den Bereichen  $1 < \zeta < \infty$ ;  $-1 < \mu < 1$  durchlaufen, so erhält man in jeder Meridianebebene ein konfokales Netz von Ellipsen und Hyperbeln, das als Koordinationsnetz verwendet werden kann. Statt  $\zeta$  und  $\mu$  kann man auch manchmal bipolare Koordinaten mit Hilfe der Transformation

$$\zeta = \text{Cof } \alpha; \quad \mu = \cos \beta \quad (4)$$

einführen, womit die rechtwinkeligen Koordinaten die einfache Form

$$x = c \text{Cof } \alpha \cos \beta; \quad \eta = c \sin \alpha \sin \beta \quad (5)$$

erhalten. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß man gelegentlich die komplexe Schreibweise einführen kann wegen

$$z = x + i\eta = c \text{Cof}(\alpha + i\beta),$$

wodurch manche Formeln eine einfache Gestalt erhalten. Wir wollen jetzt einige einfache Funktionen der Koordinaten  $\zeta$  und  $\mu$  betrachten und die entsprechenden Bildkurven in der Meridianebene verfolgen. Setzen wir etwa Proportionalität von  $\zeta$  und  $\mu$  voraus, also eine Gleichung

$$\zeta = g\mu, \quad (6)$$

das heißt eine durch den Nullpunkt gehende Gerade in der  $\zeta\mu$ -Ebene, so folgt mit Hilfe von (2)

$$\left[ x - \frac{1}{2} c \left( g + \frac{1}{g} \right) \right]^2 + \eta^2 = \frac{1}{4} c^2 \left( g - \frac{1}{g} \right)^2, \quad (7)$$

das heißt ein Kreis mit der Gleichungsform

$$(x - x_0)^2 + \eta^2 = a^2$$

hat, dessen Mittelpunkt in  $x = x_0 = \frac{1}{2} c \left( g + \frac{1}{g} \right)$  liegt und dessen Halbmesser die Größe  $a = \frac{1}{2} c \left( g - \frac{1}{g} \right)$  hat. Diese Bestimmungsgrößen genügen der Beziehung

$$x_0^2 - a^2 = c^2. \quad (8)$$

Man findet also einen Punkt des Kreises als Schnitt des Halbkreises über der Strecke  $OM (= x_0)$  mit dem Kreis um  $O$  mit dem Radius  $c$ . Geht man umgekehrt von dem Kreis aus

$$(x - x_0)^2 + \eta^2 = a^2,$$

wo jetzt  $x_0$  und  $a$  beliebig sind, so erhält man als Bildkurve

$$c^2 (\zeta^2 + \mu^2) - 2 c x_0 \zeta \mu = a^2 + c^2 - x_0^2. \quad (9)$$

Diese Gleichung stellt, wie man leicht feststellt, eine Ellipse oder Hyperbel dar, je nachdem  $c \gtrless x_0$  wird, deren Hauptachsen mit den Grundachsen Winkel von  $45^\circ$  bzw.  $135^\circ$  bilden. Bemerkenswert sind folgende Sonderfälle:

a) Wenn

$$x_0^2 - a^2 = c^2$$

ist, erhalten wir wieder den oben angegebenen Fall mit der einfachen Gleichung:

$$\zeta = \frac{x_0 \pm a}{c} \mu = g\mu.$$

b) Ist  $x_0 = c$ , fällt also der Mittelpunkt  $M$  des Kreises in den rechten Endpunkt  $C_2$  der Grundstrecke, so entsteht die einfache Beziehung

$$\zeta - \mu = \pm \frac{a}{c} \quad (10)$$

als Gleichung zweier Geraden durch die Punkte  $\zeta = \pm \frac{a}{c}$ ,  $\mu = 0$ , die mit der  $\zeta$ -Achse Winkel von  $45^\circ$  bilden.

c)  $x_0 = -c$  gibt in der  $x\eta$ -Ebene einen Kreis um den linken Endpunkt  $C_1$  der Grundstrecke und in der  $\zeta\mu$ -Ebene zwei Gerade durch die Punkte  $\zeta = \pm \frac{a}{c}$ ,  $\mu = 0$ , die mit der  $\zeta$ -Achse Winkel von  $135^\circ$  bilden.

d)  $x_0 = 0$ , dem Kreise

$$x^2 + \eta^2 = a^2$$

um den Nullpunkt entsprechend, gibt in der Bildebene den Kreis

$$\zeta^2 + \mu^2 = 1 + \frac{a^2}{c^2}. \quad (11)$$

Diese Bemerkungen sind für die Konstruktion gewisser Grenzkurven von Rotationsflächen von Nutzen.

### III. Darstellung von geschlossenen Rotationskörpern.

Um geschlossene Rotationskörper zu gewinnen, zu denen also auch geschlossene Meridiankurven entsprechen, geht man am besten aus von einer Verteilung von Quellen und Senken längs der Achse, deren Gesamtergiebigkeit gleich Null ist. Eine einzelne Punktquelle im Punkt  $x = \alpha$  der Ergiebigkeit  $q$  hat das Potential

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi r} = -\frac{q}{4\pi \sqrt{(x-\alpha)^2 + \eta^2}}, \quad (12)$$

aus dem sich dann, wie bekannt, die Geschwindigkeiten durch Differentiation ableiten. Bei einer beliebigen, von der  $x = -c$  bis  $x = +c$  definierten Verteilungsfunktion  $f(\alpha)$  erhalten wir daher das Potential

$$\Phi = -A v_1 \int_{-c}^{+c} \frac{f(\alpha) d\alpha}{r}, \quad (13)$$

wo  $A$  eine Konstante bedeutet, die von der Quell- bzw. Senkenstärke und daher indirekt auch von den Abmessungen des zugeordneten Rotationskörpers abhängt, dessen Axialgeschwindigkeit mit  $v_1$  bezeichnet ist. Die Schließungsbedingung oder die Bedingung dafür, daß der Rotationskörper geschlossen ist, lautet dann

$$\int_{-c}^{+c} f(\alpha) d\alpha = 0. \quad (14)$$

Es läßt sich nun zeigen, daß die Quellverteilung ersetzt werden kann durch eine gleichwertige Verteilung von Dipolen, die nach der  $x$ -Richtung orientiert sind: die Beziehung beider Funktionen ist derart, daß die negative Ableitung der Verteilungsfunktion  $g$  der Dipole nach der axialen Koordinate die Verteilungsfunktion  $f$  der gleichwertigen Quellen ergibt. Setzen wir nämlich

$$f(\alpha) = -\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}, \quad (15)$$

so wird das Potential

$$\Phi = A v_1 \int \frac{dg(\alpha)}{r}.$$

Durch partielle Integration ergibt sich aber

$$\begin{aligned} \Phi &= A v_1 \left[ \frac{g(\alpha)}{r} \right]_1^2 + A v_1 \int \frac{g(\alpha)}{r^2} dr \\ &= A v_1 \left[ \frac{g(\alpha)}{r} \right]_1^2 - A v_1 \int \frac{g(\alpha) \cos \vartheta}{r^2} d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Da das Potential eines einzelnen Dipols im Punkte  $x = \alpha$  die Form

$$\Phi = -\frac{m}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{r^2} \quad (17)$$

hat, so ergibt sich, daß der letzte Ausdruck in (16) identisch ist mit dem Potential einer Dipolverteilung mit der Verteilungsfunktion  $g$ . Wenn also im besonderen  $g_1 = g_2 = 0$  wird, also die Werte von  $g$  in den Endpunkten der Grundstrecke verschwinden, so ist  $\Phi$  nur von den Dipolen abhängig. Diese Bedingung ist aber verträglich mit der Bedingung (14), die in unserem Falle lautet:

$$\int_1^2 f(\alpha) d\alpha = - \int_1^2 \frac{dg}{d\alpha} d\alpha = - [g(\alpha)]_1^2. \quad (18)$$

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt in dem Beispiel  $f = \alpha$ ,  $g = \frac{1}{2}(c^2 - \alpha^2)$ , das, wie sich zeigen läßt, zum Ellipsoid führt.

Der Satz läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß wir etwa in den Endpunkten der Grundstrecke eine Einzelquelle und Einzelsenke haben neben einer stetigen Senkenverteilung längs der Grundstrecke. Wir erhalten dann, da wir jetzt die positive Ableitung zu nehmen haben,

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{q_2}{4\pi r_2} + \frac{q_1}{4\pi r_1} + A v_1 \int \frac{dg(\alpha)}{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} \right) + A v_1 \left( \frac{g_2}{r_2} - \frac{g_1}{r_1} \right) - A v_1 \int \frac{g(\alpha) \cos \vartheta d\alpha}{r^2}.\end{aligned}\quad (19)$$

Nun ist nach der Schließungsbedingung

$$A \int_1^2 f(\alpha) d\alpha = A(g_2 - g_1) = \frac{1}{4\pi v_1} (q_2 - q_1). \quad (20)$$

Wenn also die Bedingungen

$$A g_2 = \frac{q_2}{4\pi v_1}; \quad A g_1 = \frac{q_1}{4\pi v_1} \quad (21)$$

erfüllt sind, so läßt sich in der Tat das Potential in der Form

$$\Phi = -A v_1 \int_1^2 \frac{g(\alpha) \cos \vartheta d\alpha}{r^2} \quad (22)$$

darstellen, das heißt von einer Verteilung von Dipolen allein ableiten. Wenn im besonderen die Einzelsenke in  $x = -c$  verschwindet, so wird mit  $q_2 = q$

$$A g_2 = \frac{q}{4\pi}; \quad g_1 = 0. \quad (21a)$$

Dieser Fall ist im besonderen geeignet zum ersten Aufbau von einfachen unsymmetrischen Rotationskörpern und soll daher den Rechnungen in den folgenden Abschnitten zugrunde gelegt werden.

Zuvor noch einige Bemerkungen zu der Potentialfunktion und der zugeordneten Stromfunktion  $\Psi$ . Die Potentialfunktion gibt durch ihre Ableitungen die absoluten Geschwindigkeiten in der Umgebung des axial bewegten Rotationskörpers. Das Potential für die Relativströmung lautet dann, wenn  $v_1$  die Bewegungsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\Phi' = -v_1 x + \Phi. \quad (23)$$

Spaltet man den Faktor  $v_1$  ab, so erhält man bei Zugrundelegung der Form (13) die für die Folge maßgebende Quellfunktion

$$F_1 = \frac{\Phi}{v_1} = -A \int_1^2 \frac{f(\alpha) d\alpha}{r}, \quad (24)$$

der die Quellfunktion der Relativbewegung

$$F'_1 = F_1 - x \quad (25)$$

entspricht. Die Meridiangrenze des so bestimmten Rotationskörpers ergibt sich aus der Stromfunktion  $\Psi$ , die aus der Potentialfunktion durch eine einfache Integration gewonnen werden kann. Allgemein hat man

$$\Psi = \int_0^\eta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \eta d\eta = -A v_1 \int_0^\eta \int_1^2 \frac{f(\alpha) (x - \alpha) \eta d\alpha d\eta}{r^3}. \quad (26)$$

Wenn man Ellipsoidkoordinaten einführt, so hängen  $\Phi$  und  $\Psi$  durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = -c(\zeta^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = c(1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \quad (27)$$

zusammen.

#### IV. Anwendung auf den Fall eines unsymmetrischen Rotationskörpers.

Wir setzen die Verbindung einer in  $x = c$  gelegenen Punktquelle mit einer Streckensenke gleicher Ergiebigkeit voraus. Das Potential der Punktquelle in Ellipsoidkoordinaten wird

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi r_2} = -\frac{q}{4\pi c(\zeta - \mu)}. \quad (28)$$

Für die von  $x = -c$  bis  $x = c$  reichende Streckensenke haben wir mit  $f(x) = 1$

$$\Phi = A v_1 \int_1^2 \frac{d\alpha}{r},$$

wo die Konstante  $A$  aus dem Wert der Gesamtergiebigkeit der Strecke, das heißt aus der Gleichung

$$A v_1 \int_1^2 d\alpha = \frac{q}{4\pi} = 2c A v_1$$

zu

$$A v_1 = \frac{q}{8\pi c} \quad (29)$$

sie ergibt. Zur Ausführung der Integration verwenden wir vorübergehend als Variable den Winkel  $\vartheta$  zwischen dem Radiusvektor nach dem Achsenpunkt  $x = \alpha$  und der  $x$ -Achse. Dann wird

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{x - \alpha}{\eta}; \quad x - \alpha = \eta \operatorname{ctg} \vartheta,$$

$$d\alpha = \frac{\eta d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}; \quad \frac{\eta}{r} = \sin \vartheta.$$

Das unbestimmte Integral geht dann über in

$$\int \frac{d\alpha}{r} = \int \frac{\eta d\vartheta}{\sin^2 \vartheta r} = \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{1}{2} \lg \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}. \quad (30)$$

Gehen wir bei der Einsetzung der Grenzen zu Ellipsoidkoordinaten über, so wird für die Endpunkte der Grundstrecke

$$\cos \vartheta_2 = \frac{x - c}{r_2} = \frac{\zeta \mu - 1}{\zeta - \mu}; \quad \cos \vartheta_1 = \frac{\zeta \mu + 1}{\zeta + \mu}, \quad (31)$$

also

$$\left[ \frac{1}{2} \lg \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right]_1^2 = \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}. \quad (32)$$

Wir erhalten daher als Gesamtpotential für das System Punktquelle + Streckensenke

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi c(\zeta - \mu)} + \frac{q}{8\pi c} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = -\frac{q}{4\pi c} \left[ \frac{1}{\zeta - \mu} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right]. \quad (33)$$

Nach dem angegebenen allgemeinen Satz erhält man denselben Ausdruck, wenn

von einer von  $x = -c$  bis  $x = c$  reichenden und linear zunehmenden Dipolverteilung (kurz von einem Dipolkeil) ausgeht. Das kann direkt bestätigt werden. Setzen wir also

$$g(\alpha) = c + \alpha,$$

so ergibt sich als Potential des Dipolkeils

$$\Phi = -A v_1 \int \frac{(x + c - \eta \operatorname{ctg} \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta}{\eta}.$$

Durch Auflösung der dabei auftretenden Integrale erhält man

$$\Phi = A v_1 \left[ \lg \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right]_1^2 + A v_1 [\cos \vartheta]_1^2 - A v_1 \frac{x + c}{\eta} [\sin \vartheta]_1^2.$$

Mit Benutzung der Formeln

$$[\cos \vartheta]_1^2 = -\frac{2 \zeta (1 - \mu^2)}{\zeta^2 - \mu^2}; \quad \left[ \frac{\sin \vartheta}{\eta} \right]_1^2 = \frac{2 \mu}{c (\zeta^2 - \mu^2)}; \quad [\sin \vartheta]_1^2 = \frac{2 \mu \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)}}{\zeta^2 - \mu^2} \quad (34)$$

sowie der Gl. (32) erhält man in der Tat den obenstehenden Ausdruck für das Potential.

Wenn man die Konstante  $q$  durch die Geschwindigkeit  $v_1$  und die Abmessungen des zugeordneten Rotationskörpers ausgedrückt denkt, so haben wir damit gleichzeitig das Potential für die absolute Strömung in der Umgebung des axial bewegten Rotationskörpers. Spaltet man  $v_1$  ab und setzt

$$b^2 = \frac{q}{\pi v_1},$$

so erhält man die Funktion  $F_1$  in der Form

$$F_1 = -\frac{b^2}{4c} \left[ \frac{1}{\zeta - \mu} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right]. \quad (35)$$

$F_1$  hat die Dimension einer Länge. Die Größe  $c$  gibt ein Maß für die Längenabmessung und die Größe  $b$  ein Maß für die Quer- oder Breitenabmessung des Körpers. Die Gleichung der Meridianbegrenzung erhält man aus der Stromfunktion  $\Psi$ , die sich mit Hilfe der Beziehungen (27) und (33) berechnen lässt. Man erhält durch eine geringe Rechnung

$$\Psi = \frac{q}{4\pi} \left[ \zeta + \mu - \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta - \mu} \right] = \frac{1}{4} b^2 v_1 \frac{1 - \mu^2}{\zeta^2 - \mu^2}, \quad (36)$$

daher für die Relativbewegung

$$\Psi' = -\frac{1}{2} v_1 \eta^2 + \Psi. \quad (37)$$

Daraus leitet sich dann die Gleichung des Meridiananschnittes  $C$  in Ellipsoidkoordinaten ab in der Form

$$\Psi' = -\frac{1}{2} v_1 \eta^2 + \frac{1}{4} b^2 v_1 \frac{1 - \mu^2}{\zeta^2 - \mu^2} = 0. \quad (38)$$

Mit Einsetzung des Wertes für  $\eta^2$  ergibt sich daraus

$$\zeta - \mu = \frac{b^2}{2c^2(\zeta^2 - 1)}; \quad \mu = \zeta - \frac{b^2}{2c^2(\zeta^2 - 1)}. \quad (39)$$

Diese Gleichung gestattet in sehr einfacher Weise, die Werte von  $\mu$  aus den  $\zeta$ -Werten und damit [vgl. (4) und (5)] die Schnittkurve punktweise zu berechnen, während man bei rechtwinkeligen oder Polarkoordinaten irrationale Ausdrücke und quadratische Gleichungen in Kauf nehmen muß. In der Tabelle 1 haben wir eine Reihe von Koordinaten  $\zeta, \mu$  mit den zugehörigen rechtwinkeligen Koordinaten, und zwar für sechs Werte von  $\frac{b}{c}$  wiedergegeben.

Tabelle 1. Berechnung des Meridianschnittes des Rotationskörpers.

$\frac{b}{c} = 0.1$				$\frac{b}{c} = 0.2$			
$\zeta$	$\mu$	$\frac{x}{c}$	$\frac{\eta}{c}$	$\zeta$	$\mu$	$\frac{x}{c}$	$\frac{\eta}{c}$
1.00125	— 1.0	— 1.00125	0	1.00497	— 1	— 1.00497	0
1.0015	— 0.665	— 0.6655	0.041	1.005	— 0.989	— 0.994	0.015
1.002	— 0.248	— 0.2485	0.0612	1.006	— 0.655	— 0.659	0.083
1.004	0.380	0.3815	0.0829	1.008	— 0.2373	— 0.239	0.123
1.01	0.761	0.7689	0.0920	1.01	0.015	0.0152	0.142
1.02	0.896	0.9141	0.0892	1.02	0.525	0.536	0.171
1.04	0.9787	1.0178	0.0587	1.04	0.794	0.826	0.174
1.0494	1.0	1.0494	0	1.06	0.898	0.952	0.154
—	—	—	—	1.08	0.960	1.037	0.115
—	—	—	—	1.09	0.984	1.076	0.078
—	—	—	—	1.0976	1.0	1.0976	0
$\frac{b}{c} = 0.4$				$\frac{b}{c} = 0.6$			
$\zeta$	$\mu$	$\frac{x}{c}$	$\frac{\eta}{c}$	$\zeta$	$\mu$	$\frac{x}{c}$	$\frac{\eta}{c}$
1.0196	— 1	— 1.0196	0	1.04315	— 1	— 1.04315	0
1.02	— 0.96	— 0.98	0.056	1.045	— 0.9115	— 0.9525	0.1247
1.025	— 0.555	— 0.57	0.187	1.05	— 0.706	— 0.7413	0.1247
1.03	— 0.284	— 0.293	0.236	1.08	— 0.0017	— 0.0018	0.2263
1.05	0.27	0.284	0.308	1.10	0.243	0.2673	0.408
1.08	0.599	0.648	0.326	1.15	0.592	0.681	0.444
1.10	0.719	0.792	0.320	1.20	0.791	0.949	0.458
1.15	0.903	1.04	0.244	1.27	0.976	1.24	0.406
1.18	0.976	1.152	0.136	1.2809	1	1.2809	0.169
1.19115	1	1.1912	0	—	—	—	0
$\frac{b}{c} = 0.8$				$\frac{b}{c} = 1$			
$\zeta$	$\mu$	$\frac{x}{c}$	$\frac{\eta}{c}$	$\zeta$	$\mu$	$\frac{x}{c}$	$\frac{\eta}{c}$
1.0744	— 1	— 1.0744	0	1.1121	— 1	— 1.1121	0
1.08	— 0.843	— 0.910	0.2195	1.12	— 0.842	— 0.943	0.273
1.10	— 0.423	— 0.465	0.416	1.14	— 0.53	— 0.605	0.464
1.15	0.158	0.1817	0.561	1.16	— 0.287	— 0.333	0.564
1.16	0.234	0.2714	0.571	1.18	— 0.09	— 0.1062	0.622
1.18	0.3645	0.430	0.583	1.20	0.063	0.756	0.664
1.20	0.472	0.566	0.585	1.25	0.362	0.453	0.699
1.30	0.836	1.087	0.457	1.30	0.576	0.749	0.678
1.3676	1.0	1.3676	0	1.40	0.88	1.23	0.466
—	—	—	—	1.4515	1	1.4515	0

Die beiden Extremwerte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ , den beiden Scheitelpunkten mit  $\mu = \pm 1$  entsprechend, ergeben sich aus je einer Gleichung dritter Ordnung, die am besten

mit Hilfe von Kreis- oder hyperbolischen Funktionen aufgelöst werden kann<sup>4</sup>. Aus (2) und (39) bestimmt sich dann die Länge des Potentialkörpers zu

$$l = 2c(\zeta_1 + \zeta_2).$$

Die größte Breite, die von  $b$  abhängt und angenähert  $b$  proportional ist, liegt um so weiter nach vorne, je kleiner  $b$  ist, und rückt mit wachsendem  $b$  mehr und mehr in die Mitte. Die Breitenabmessung selbst ist stets kleiner als die Größe  $b$ , die den Grenzradius des unendlich langen Halbkörpers darstellt, der entsteht, wenn der eine Endpunkt  $C_1$  der Strecke ins Unendliche rückt, wie man leicht durch Grenzübergang zeigen kann (Abb. 1).

Wir haben die Extremwerte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  sowie die Länge  $l$  und den größten Durchmesser  $d$  für späteren Bedarf für einige Werte von  $b$  bei festgehaltenem  $c$  zusammengestellt (Tabelle 2), ferner  $d$  und  $l$  in Abhängigkeit von  $\frac{b}{c}$  graphisch aufgezeichnet (Abb. 2).

Für die Berechnung des Trägheitskoeffizienten  $k_1$  der Längsbewegung interessiert vor allem der Verlauf von  $F_1$  längs des Meridianabschnittes des Rotationskörpers. Wenn wir  $\zeta - \mu$  aus (39) in den Ausdruck für  $F_1$  einsetzen, erhalten wir

$$F_1 = -\frac{b^2}{4c} \left[ \frac{2c^2}{b^2} (\zeta^2 - 1) - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right]. \quad (40)$$

Der Verlauf dieser Funktion längs  $C$  ist für den Fall  $\frac{b}{c} = 0.2$  in der Abb. 4 wiedergegeben.

<sup>4</sup> Für die obere Grenze hat man z. B.

$$\zeta_2^3 - \zeta_2^2 - \zeta_2 + 1 - \frac{b^2}{2c^2} = 0.$$

Mit  $\zeta_2 = t + \frac{1}{3}$  ergibt sich die Normalform

$$t^3 - 3pt - 2q = 0,$$

wo  $p = \frac{4}{9}$ ,  $q = \frac{b^2}{4c^2} - \frac{8}{27}$ .

Da hier  $q^2 < p^3$  ist, so kann man setzen

$$\cos u = \frac{q}{p^{3/2}} = \frac{b^2}{4c^2} \cdot \frac{27}{8} - 1 = 3.375 \frac{b^2}{4c^2} - 1.$$

Dann ist die für uns in Betracht kommende Lösung

$$t = 2\sqrt{p} \cos \frac{u}{3} = \frac{4}{3} \cos \frac{u}{3}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{3} \left( 1 + 4 \cos \frac{u}{3} \right).$$

Für die untere Grenze erhält man in ähnlicher Weise

$$p = \frac{4}{9}; \quad q = \frac{8}{27} + \frac{b^2}{4c^2} \quad (q^2 > p^3),$$

$$\cos u = \frac{q}{p^{3/2}} - 1 + 3.375 \frac{b^2}{4c^2}; \quad \zeta_1 = \frac{1}{3} \left( 4 \cos \frac{u}{3} - 1 \right).$$

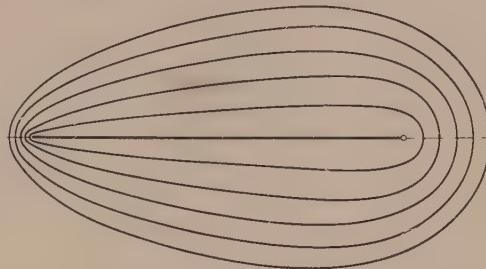


Abb. 1. Meridianschnitte von Rotationskörpern erzeugt aus Punktquelle + Streckensenke oder Dipolkeil.

Tabelle 2. Berechnung der Größen  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  und  $J$ ,  $K$ ,  $L$ .

	$\frac{b}{c} = 0.1$		$\frac{b}{c} = 0.2$		$\frac{b}{c} = 0.4$	
	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
$\zeta$	1.00125	1.0494	1.00497	1.0976	1.01961	1.19115
$\zeta^2 - 1$	0.0025	0.10124	0.009965	0.20472	0.0396	0.41884
$\frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}$	400.562	10.3654	100.748	5.3614	25.747	2.8439
$\text{Ar Tg } \frac{1}{\zeta}$	3.69	1.8626	3.00	1.5338	2.3173	1.2195
$Q_0$	2.6946	0.9546	2.0149	0.6835	1.3627	0.4526
$Q_1$	396.872	8.5028	97.748	3.8284	23.417	1.6244
$\frac{1}{c^3} J$	0.00968		0.03763		0.1430	
$\frac{1}{c^3} K$	0.0003196		0.002378		0.01705	
$\frac{1}{c^3} L$	—		1.2904		1.2207	
	$\frac{b}{c} = 0.6$		$\frac{b}{c} = 0.8$		$\frac{b}{c} = 1.0$	
	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
$\zeta$	1.04315	1.2809	1.0744	1.3676	1.1121	1.4515
$\zeta^2 - 1$	0.0881	0.6408	0.15433	0.87033	0.2367	1.1069
$\frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}$	11.840	1.9989	6.9034	1.5714	4.698	1.3113
$\text{Ar Tg } \frac{1}{\zeta}$	0.9586	0.7808	1.664	0.9315	1.468	0.8460
$Q_0$	1.012	0.3416	0.7878	0.2739	0.6326	0.22797
$Q_1$	9.9110	0.9515	5.2977	0.6399	3.230	0.4653
$\frac{1}{c^3} J$	0.3084		0.52964		0.80792	
$\frac{1}{c^3} K$	0.051384		0.11034		0.19456	
$\frac{1}{c^3} L$	1.170		1.1358		1.1030	

V. Berechnung des Trägheitskoeffizienten  $k_1$  der Längsbewegung.

Das instabile Moment, das entsteht, wenn die Bewegungsrichtung um einen Winkel  $\beta$  von der Längsrichtung des Rotationskörpers abweicht, ist bekanntlich von den Komponenten des scheinbaren Volumens abhängig, die man erhält, wenn man das wirkliche Volumen  $V$  des Körpers mit den Trägheitskoeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  für die Längs- und Querrichtung multipliziert. Beide Koeffizienten lassen sich, wie ich im ersten Bericht ausgeführt habe, durch einfache Integrale längs der Meridiangrenze des Körpers berechnen. Für  $k_1$  hat man z. B. den Ausdruck

$$k_1 = \frac{\pi \int F_1 d\eta^2}{\pi \int \eta^2 dx} = \frac{\int F_1 d\eta^2}{\int \eta^2 dx} = \frac{K}{J}, \quad (41)$$

wo  $\pi J = V$  das Volumen des Rotationskörpers bezeichnet. Es soll nun gezeigt werden, daß  $k_1$  durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden kann, in dem nur die beiden Scheitelwerte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  auftreten. Wir führen in dem Integral die unabhängige Variable  $\zeta$  ein. Aus

$$\eta^2 = c^2 (\zeta^2 - 1) (1 - \mu^2)$$

erhalten wir

$$d\eta^2 = 2c^2 \left[ \zeta(1 - \mu^2) - \frac{d\mu}{d\zeta} \mu(\zeta^2 - 1) \right] d\zeta.$$

Nun folgt aus der Gl. (39) der Meridiankurve

$$\frac{d\mu}{d\zeta} = 1 + \frac{b^2 \zeta}{c^2 (\zeta^2 - 1)^2}.$$

Damit wird

$$d\eta^2 = -2c^2 \left[ (\zeta\mu + 1)(\zeta + \mu) + \frac{b^2 \zeta \mu}{c^2 (\zeta^2 - 1)} \right].$$

Mit Einsetzung der Werte

$$\zeta\mu - 1 = \zeta^2 - 1 - \frac{b^2 \zeta}{2c^2 (\zeta^2 - 1)}; \quad \zeta + \mu = 2\zeta - \frac{b^2}{2c^2 (\zeta^2 - 1)}$$

erhält man daraus nach Vereinfachung

$$d\eta^2 = -2c^2 \left[ 2\zeta(\zeta^2 - 1) - \frac{b^2}{2c^2} - \frac{b^4 \zeta}{4c^4 (\zeta^2 - 1)^2} \right] d\zeta.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} F_1 d\eta^2 &= \frac{1}{2} c b^2 \left[ \frac{4c^2}{b^2} \zeta(\zeta^2 - 1)^2 - (\zeta^2 - 1) - \zeta(\zeta^2 - 1) \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2}{4c^2} \left( \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) + \frac{b^4}{8c^4} \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1)^2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Benutzt man nun folgende Integralformeln:

$$\begin{aligned} \int \zeta(\zeta^2 - 1)^2 d\zeta &= \frac{1}{6}(\zeta^2 - 1)^3; \quad \int (\zeta^2 - 1) d\zeta = \frac{1}{3} \zeta(\zeta^2 - 3); \quad \int \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \frac{1}{2} \lg(\zeta^2 - 1), \\ \int \zeta(\zeta^2 - 1) \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} d\zeta &= \frac{1}{4}(\zeta^2 - 1) \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \frac{1}{6} \zeta(\zeta^2 - 3), \\ \int \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} d\zeta &= \zeta \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \lg(\zeta^2 - 1), \\ \int \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1)^2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} d\zeta &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\zeta^2 - 1)} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

so ergibt sich für  $K$  folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} K = K_2 - K_1 &= \frac{1}{2} c b^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{c^2}{b^2} (\zeta^2 - 1)^3 - \frac{1}{2} (\zeta^2 - 3) - \frac{1}{4} (\zeta^2 - 1) \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2}{4c^2} \zeta \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{1}{16} \frac{b^4}{c^4 (\zeta^2 - 1)} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \frac{1}{16} \frac{b^4}{c^4} \left( \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) \right]_1^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Der Ausdruck kann weiter vereinfacht werden, wenn man berücksichtigt, daß für die obere und untere Grenze, das heißt die Scheitelwerte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ , folgende Beziehungen bestehen:

$$\zeta_2^2 - 1 = \frac{b^2}{2c^2 (\zeta_2 - 1)}; \quad \zeta_1^2 - 1 = \frac{b^2}{2c^2 (\zeta_1 + 1)}. \quad (45)$$

Dann erhält man

$$K = c^3 \left[ \frac{1}{3} (\zeta^2 - 1)^3 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{c^2} \zeta (3 - \zeta^2) + \frac{1}{32} \frac{b^6}{c^6} \left( \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) \right]_1^2. \quad (46)$$

Wenn man schließlich noch mit Hilfe von (39)  $c^2$  durch  $b^2$  ausdrückt, so kann man die Werte für die obere und untere Grenze auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} K_2 &= c^3 \left\{ \frac{1}{12} \frac{b^2}{c^2} [\zeta(7 - \zeta^2) + 2(\zeta^2 - 1)] + \frac{1}{32} \frac{b^6}{c^6} Q_1 \right\}_{\zeta=\zeta_2} \\ K_1 &= c^3 \left\{ \frac{1}{12} \frac{b^2}{c^2} [\zeta(7 - \zeta^2) - 2(\zeta^2 - 1)] + \frac{1}{32} \frac{b^6}{c^6} Q_1 \right\}_{\zeta=\zeta_1} \end{aligned} \quad (47)$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = Q_1$$

gesetzt ist. Dann wird

$$K = K_2 - K_1.$$

Ebenso läßt sich das Volumen in geschlossener Form darstellen. Man erhält zunächst

$$J = \frac{V}{\pi} = \int \eta^2 dx = c^3 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ 2 \frac{b^2}{c^2} \zeta^2 + \frac{b^4 \zeta}{c^4 (\zeta^2 - 1)^2} - \frac{b^6}{8 c^6} \cdot \frac{(\zeta^2 + 1)}{(\zeta^2 - 1)^3} - 2 \zeta (\zeta^2 - 1)^2 - \frac{b^2}{2 c^2} (\zeta^2 + 1) \right] d\zeta.$$

Mit Benutzung der oben angeführten Integrale und der weiteren Formel

$$\int \frac{(\zeta^2 + 1) d\zeta}{(\zeta^2 - 1)^3} = \frac{1}{4} Q_1 - \frac{\zeta}{2 (\zeta^2 - 1)^2},$$

ergibt sich

$$J = c^3 \left[ \frac{1}{2} \frac{b^2}{c^2} \zeta (\zeta^2 - 1) - \frac{1}{2} \frac{b^4}{c^4 (\zeta^2 - 1)} - \frac{1}{3} (\zeta^2 - 1)^3 + \frac{b^6 \zeta}{16 c^6 (\zeta^2 - 1)^2} - \frac{b^6}{32 c^6} Q_1 \right]_1^2 \quad (48)$$

oder mit (39)

$$\begin{aligned} J_2 &= c^3 \left\{ \frac{1}{12} \frac{b^2}{c^2} (\zeta - 1) [7 (\zeta^2 - 2) - \zeta] - \frac{b^6}{32 c^6} Q_1 \right\}_{\zeta=\zeta_2} \\ J_1 &= c^3 \left\{ \frac{1}{12} \frac{b^2}{c^2} (\zeta + 1) [7 (\zeta^2 - 2) + \zeta] - \frac{b^6}{32 c^6} Q_1 \right\}_{\zeta=\zeta_1} \end{aligned} \quad (49)$$

Damit wird der Trägheitskoeffizient  $k_1$

$$k_1 = \frac{K_2 - K_1}{J_2 - J_1} = \frac{K}{J}. \quad (50)$$

Auf die Abhängigkeit dieser Koeffizienten von  $\frac{b}{c}$  und das Verhältnis  $\frac{d}{l}$  komme ich an späterer Stelle zurück, nachdem die Berechnung des Trägheitskoeffizienten  $k_2$  durchgeführt ist.

## VI. Allgemeine Sätze über die Potentialfunktion der Querströmung.

Die Auffindung der Querströmung bietet zunächst einige Schwierigkeiten. Da aber die hier zu betrachtenden Rotationsformen mit dem Ellipsoid vergleichbar sind, kann man von folgenden allgemeinen Überlegungen ausgehen. Wir haben oben gesehen, daß die Längsströmung aus einer Dipolverteilung gewonnen werden kann, bei der die Achsen der Dipole in die  $x$ -Richtung gestellt sind. Bei einem einzelnen Dipol erhält man bekanntlich als Stromgrenze eine Kugel und die Drehung des Dipols ohne Änderung seiner Stärke hat eine Änderung der Bewegungsrichtung der gleichbleibenden Kugel zur Folge. Die Längsströmung um ein Ellipsoid gewinnen wir aus einem Quell- und Senkenkeil, die durch die Verteilungsfunktion  $f(\alpha) = \alpha$  ( $-c \leq \alpha \leq c$ ) zusammengefaßt sind oder einer damit gleichwertigen parabolischen Dipolverteilung mit der Verteilungsfunktion  $g(\alpha) = \frac{1}{2}(c^2 - \alpha^2)$ . Die Querströmung des Ellipsoids infolge Bewegung in der  $y$ -Richtung wird auch in diesem Falle dadurch erhalten, daß die Achsen der Dipole bei gleichbleibender Verteilungsfunktion in die  $y$ -Richtung gedreht und gleichzeitig die Konstante, das heißt die Gesamtstärke, der Randbedingung entsprechend, abgeändert wird. Dadurch wird die Quellverteilung  $f(\alpha)$  für die Längsströmung der Ableitung der Dipolverteilung  $h(\alpha) = \lambda g(\alpha)$  für die Querströmung nach der axialen Koordinate proportional oder beide Funktionen  $f(\alpha)$  und  $h(\alpha)$  verhalten sich im Falle des Ellipsoids, von einem Proportionalitäts-

faktor abgesehen, wie die Querkraft- und Biegungsmomentenverteilung bei einem senkrecht zu einer Achse belasteten linearen Balken. Obwohl dieser Satz streng genommen nicht für jede Verteilungsfunktion gültig ist, so kann man den Vergleich doch benutzen, um sich eine erste Anschauung von der gesuchten Dipolverteilung  $g(\alpha)$  zu bilden, die denselben Rotationskörper als Grenze ergibt wie die Ausgangsverteilung  $f(\alpha)$  der Quellen und Senken.

Insbesondere läßt sich die Querströmung für den aus Quellpunkt und Senkstrecke abgeleiteten Fall des ovalartigen Rotationskörpers in erster, allerdings nur roher Annäherung aus einem Dipolkeil, das heißt aus einer linearen Verteilungsfunktion von Dipolen ableiten, die in die  $y$ -Richtung gestellt sind, wenn man nachträglich die noch unbestimmte Konstante etwa durch die Forderung festlegt, daß der Staupunkt der Querströmung auf die Schnittkurve des Körpers mit der Meridianebene  $\varphi = 0$  fällt. Für die Querströmung eines Dipolkeils haben wir aber die Potentialfunktion

$$\Phi_2 = -B v_2 \cos \varphi \int_1^2 \frac{(c + \alpha) \sin \vartheta d\alpha}{r^2} = -B v_2 \cos \varphi \int_1^2 \frac{x + c - \eta \operatorname{ctg} \vartheta}{\eta} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (51)$$

wenn  $\varphi$  den Polarwinkel in der Parallelkreisebene gegen die  $y$ -Achse bedeutet. Wenn man die Integration ausführt, so erhält man

$$\Phi_2 = -B v_2 \left\{ \frac{x + c}{\eta} [\cos \vartheta]_1^2 + [\sin \vartheta]_1^1 \right\} \quad (51a)$$

oder nach Einsetzung der Ellipsoidkoordinaten und nach Abspaltung von  $v_2$

$$F_2 = -2B \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{\zeta^2 - 1} (\zeta - \mu)} = -2B \frac{\sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)}}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)}. \quad (52)$$

Nun ist aber auf der Meridiankurve des Rotationskörpers

$$(\zeta - \mu)(\zeta^2 - 1) = \frac{b^2}{2c^2}.$$

Man erhält also längs  $C$

$$(F_2) = -2B \frac{2c^2}{b^2} \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)} = -4 \frac{B}{c} \frac{c^2}{b^2} \eta. \quad (53)$$

$F_2$  nimmt also auf der Meridiankurve  $C$  Werte an, die mit den negativen Ordinaten  $\eta$  verhältnisgleich sind.

Der entsprechend verallgemeinerte Satz kann dahin formuliert werden, daß die potentielle Funktion  $F_2$  eines quergestellten Dipolsystems mit der Verteilungsfunktion  $g(\alpha)$  in dem Meridianschnitt  $\varphi = 0$  eines Rotationskörpers Werte annimmt, die den negativen Abständen  $\eta$  von der Achse verhältnisgleich werden, wenn die den Körper (bzw. die Längsströmung um den Körper) erzeugende Quell- bzw. Senkenverteilung  $f(\alpha)$  als negative oder positive Ableitung  $f(\alpha) = F \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}$  der Dipolverteilung darstellbar ist.

Wir nehmen etwa eine Quelle in  $C_2$  und eine Senkenverteilung über der Grundstrecke  $C_1 C_2$  an, dann lautet nach (13), (26), (27), (28) die Stromfunktion der Absolutströmung nach Division mit  $v_1$

$$\frac{1}{v_1} \Psi = -\frac{q}{4\pi v_1} \cos \vartheta_2 + A \int \frac{f(\alpha) (x - \alpha) d\alpha}{r}. \quad (54)$$

Da der Parallelströmung in Richtung der negativen  $x$ -Achse die Funktion

$$\Psi = -\frac{1}{2} v_1 \eta^2$$

entspricht, so erhalten wir als Stromfunktion der Relativströmung

$$\frac{1}{v_1} \Psi' = -\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{q}{4 \pi v_1} \cos \vartheta_2 + A \int \frac{f(\alpha) (x - \alpha) d\alpha}{r}. \quad (54a)$$

Damit ergibt sich aber als Gleichung des Rotationskörpers

$$\eta^2 = -\frac{q}{2 \pi v_1} \cos \vartheta_2 + 2A \int \frac{f(\alpha) (x - \alpha) d\alpha}{r}$$

oder nach Division mit  $\eta$

$$\eta = 2A \int \frac{f(\alpha) (x - \alpha) d\alpha}{\eta r} - \frac{q}{2 \pi v_1 \eta} \cos \vartheta_2. \quad (55)$$

Setzt man jetzt  $f(\alpha) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}$ , so kommt durch partielle Integration

$$\eta = \frac{2A}{\eta} [g(\alpha) \cos \vartheta]_1 - 2A \int \frac{g(\alpha)}{\eta} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{(x - \alpha)^2}{r^3} \right] d\alpha - \frac{q}{2 \pi v_1 \eta} \cos \vartheta_2$$

oder wegen  $r^2 = \eta^2 + (x - \alpha)^2$

$$\eta = \frac{2A}{\eta} [g(\alpha) \cos \vartheta]_1 - \frac{q}{2 \pi v_1 \eta} \cos \vartheta_2 + 2A \int \frac{g(\alpha) \sin \vartheta}{r^2} d\alpha.$$

Wenn  $g_1 = 0$  wird, so folgt aus der Schließungsbedingung

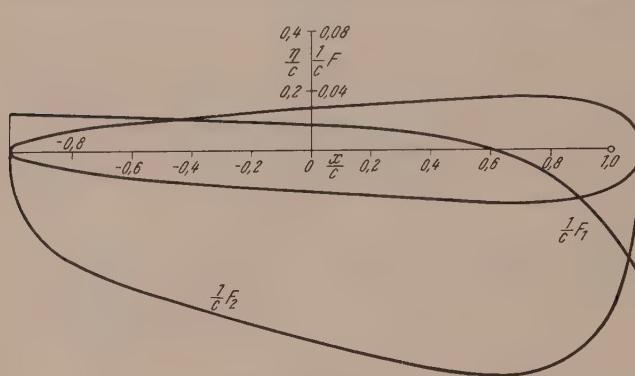


Abb. 2. Verlauf der Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  längs der Meridiankurve  $C$ .

$$A g_2 = \frac{q}{4 \pi v_1}$$

die einfache Gleichung

$$\eta = 2A \int \frac{g(\alpha) \sin \vartheta d\alpha}{r^2}. \quad (56)$$

Das Integral auf der rechten Seite stimmt aber formal bis auf eine Konstante überein mit der potentiellen Funktion einer Verteilung  $g(\alpha)$  von Dipolen, die in die  $y$ -Richtung gestellt sind, also mit der Funktion

$$F_2 = -B \cos \varphi \int \frac{g(\alpha) \sin \vartheta d\alpha}{r^2}, \quad (57)$$

wenn man  $\cos \varphi = 1$ , also  $\varphi = 0$  setzt. Der damit eingeführte Hilfskörper, entsprechend der Quellverteilung  $f(\alpha) = \frac{dg}{d\alpha}$ , weicht um so weniger von dem ursprünglichen Rotationskörper ab, je weniger dieser vom Ellipsoid sich unterscheidet. Man kann also sagen, daß bei geringer Abweichung des Rotationskörpers vom Ellipsoid die Werte der potentiellen Dipolfunktion  $F_2$  auf der Meridiankurve in erster Annäherung den Abständen von der Achse proportional sind, daß also die Kurve  $(F_2)_C$ , in Abhängigkeit von  $x$  aufgetragen, der Kurve  $\eta(x)$  ähnlich wird (Abb. 2). Ob der Satz weiterer Verallgemeinerung fähig ist, um insbesondere zur Auffindung der Funktion  $F_2$  beizutragen, soll hier nicht untersucht werden.

## VII. Bestimmung einer weiteren Näherung für das Potential der Querströmung.

Um eine gute Näherung für die Funktion  $F_2$  der Querströmung um den aus Quellpunkt und Senkenstrecke erzeugten ovalen Rotationskörper aufzustellen, wollen wir eine quadratische Dipolverteilung zugrunde legen, die sich zusammensetzt aus einem linearen Dipolkeil von der oben bereits bestimmten Art und einem rein quadratischen Keil, dessen Stärke vom Werte Null (bei  $x = -c$ ) bis zum Maximum (bei  $x = c$ )

zunimmt. Mit zwei zunächst unbestimmten Konstanten  $B_1$  und  $B_2$  haben wir für diese beiden Verteilungen die Potentialfunktionen

$$(F_2)_I = -B_1 \int \frac{(c + \alpha) \sin \vartheta d\vartheta}{\eta} = -2 B_1 \frac{\eta}{c} \frac{1}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)},$$

$$(F_2)_{II} = -B_2 \int \frac{(c + \alpha)^2 \sin \vartheta d\vartheta}{\eta}. \quad (58)$$

Setzen wir wieder wie oben vorübergehend

$$c + \alpha = x + c - \eta \operatorname{ctg} \vartheta,$$

so erhalten wir für die zweite Funktion

$$(F_2)_I = -B_2 \left[ \frac{(x + c)^2}{\eta} \int_1^2 \sin \vartheta d\vartheta + \eta \int_1^2 \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{\sin \vartheta} - 2(x + c) \int_1^2 \cos \vartheta d\vartheta \right]$$

oder nach Ausführung der Integration und Einsetzung der Ellipsoidkoordinaten

$$(F_2)_{II} = 2 B_2 c \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)} \left[ \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{2}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)} \right]. \quad (59)$$

Im ganzen haben wir also

$$F_2 = (F_2)_I + (F_2)_{II} = -2 \frac{B_1}{c} \frac{\eta}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)} + 2 B_2 \eta \left[ Q_1 - \frac{2}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)} \right]. \quad (60)$$

Da die Dipolverteilung bereits der Form des Rotationskörpers angepaßt ist, so genügt es, die beiden Konstanten  $B_1$  und  $B_2$  so zu bestimmen, daß in zwei Punkten, das heißt für zwei Wertepaare  $\zeta \mu$  der Meridiankurve  $C$  die genaue Tangentialbedingung für die Geschwindigkeit erfüllt ist. Für die Geschwindigkeiten erhält man mit Hilfe der Umrechnungsformeln

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\mu (\zeta^2 - 1)}{c (\zeta^2 - \mu^2)}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{\zeta \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)}}{c (\zeta^2 - \mu^2)};$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\zeta (1 - \mu^2)}{c (\zeta^2 - \mu^2)}; \quad \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = -\frac{\mu \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - \mu^2)}}{c (\zeta^2 - \mu^2)} \quad (61)$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{v_x}{v_2} = \frac{2 B_1}{c} \frac{\eta}{c} \frac{1}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)^2} \left[ \frac{2 \zeta \mu}{\zeta + \mu} + \frac{\zeta \mu - 1}{\zeta - \mu} \right] +$$

$$+ 4 B_2 \frac{\eta}{c} \frac{1}{(\zeta^2 - 1)(\zeta - \mu)^2} \left[ \mu + \frac{\zeta \mu - 1}{\zeta - \mu} \right],$$

$$\frac{v_\eta}{v_2} = -\frac{2 B_1}{c} \frac{1}{(\zeta + \mu)(\zeta - \mu)^2} \left[ \frac{\zeta^2 \mu^2 - 1}{\zeta^2 - 1} - \frac{2 \zeta (1 - \mu^2)}{\zeta - \mu} \right] + 2 B_2 Q_1 +$$

$$+ \frac{4 B_2}{(\zeta - \mu)^2} \left[ \frac{\mu (1 - \zeta \mu)}{\zeta^2 - 1} + \frac{1 - \mu^2}{\zeta - \mu} \right]. \quad (62)$$

Die Tangentenneigung in einem Punkte der Kurve  $C$  wird mit der oben angegebenen Formel für  $\frac{d\mu}{d\zeta}$

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{1 - \mu^2}} \cdot \frac{\zeta + \mu - \zeta \mu (3 \zeta - \mu)}{\zeta^2 (3 \zeta - \mu) - \zeta - \mu}. \quad (63)$$

Die allgemeine Tangentialbedingung lautet dann

$$\frac{v_\eta}{v_2} - 1 = \frac{v_x}{v_2} \operatorname{tg} \delta.$$

Da es in der Folge vor allem auf die Auswertung des Integrals

$$\int F_2 \eta dx$$

ankommt, wählen wir zwei Punkte mit größeren Abständen von der Achse, also etwa den Punkt mit der größten Ordinate, also  $\operatorname{tg} \delta = 0$ , und den auf der  $y$ -Achse gelegenen Punkt  $\mu = 0$ . Für  $\operatorname{tg} \delta = 0$  erhält man eine quadratische Gleichung für  $\mu = \bar{\mu}$  mit der Lösung

$$\bar{\mu} = \frac{3\bar{\zeta}^2 - 1}{2\bar{\zeta}} - \sqrt{\left(\frac{3\bar{\zeta}^2 - 1}{2\bar{\zeta}}\right)^2 - 1} \quad (64)$$

und damit die Möglichkeit, zusammengehörige Werte von  $\bar{\zeta} \bar{\mu}$  zu berechnen. Die entsprechenden Kurven  $X(\zeta \mu)$  bringen wir in der  $\zeta \mu$ -Ebene zum Schnitt mit den

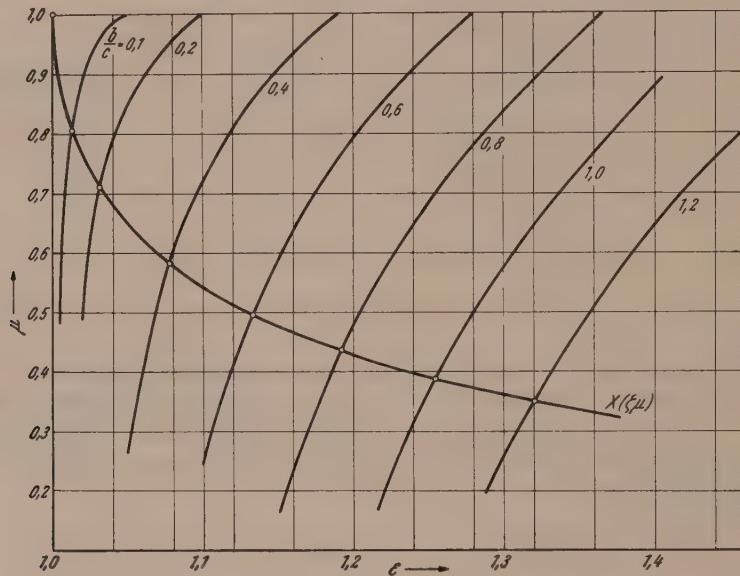


Abb. 3. Zur Bestimmung der Punkte  $\bar{\zeta} \bar{\mu}$  der Meridiankurve.

Tabelle 3. Berechnung der ausgezeichneten Punkte der Meridiankurve  $C$ .

a) Kurve  $X(\zeta \mu)$  als Ort der Punkte  $\bar{\zeta} \bar{\mu} (\delta = 0)$ .

1	1.01 1	1.02 0.820	1.04 0.757	1.05 0.673	1.06 0.643	1.10 0.618	1.20 0.544	1.25 0.429	1.3 0.391	1.4 0.366	1.5 0.361	1.5 0.358
---	-----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------

b) Koordinaten  $\zeta \mu$  der Punkte.

$\frac{b}{c}$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$\zeta_2 (\mu = 1) \dots$	1.0494	1.0976	1.19115	1.2809	1.3676	1.4515	1.533
$\zeta_1 (\mu = -1) \dots$	1.00125	1.00497	1.01961	1.04315	1.0744	1.1121	1.1551
$\bar{\zeta} \bar{\mu} \dots$	1.012	1.03	1.078	1.133	1.193	1.255	1.32
$\zeta_0 (\mu = 0) \dots$	0.806	0.706	0.582	0.498	0.435	0.388	0.350

Bildkurven  $C_b(\zeta \mu)$  der Meridianbegrenzung, die sich nur durch den Wert der Konstanten  $b$  unterscheiden (Abb. 3). Damit ergeben sich die Wertepaare  $\bar{\zeta} \bar{\mu}$  für die Koordinaten der Äquatorpunkte, Einsetzung in die Gleichung

$$\frac{v_\eta}{v_2} - 1 = 0 \quad (65)$$

liefert dann eine Bestimmungsgleichung für die beiden Konstanten. Für  $\mu = 0$  erhält man ferner

$$\frac{v_x}{v_2} = -\frac{2}{\zeta_0^3 \sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \left[ \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right]; \quad \frac{v_y}{v_2} = 2 B_2 (Q_1)_{\zeta_0} \left[ \frac{B_1}{c} \frac{(2 \zeta_0^2 - 1)}{\zeta_0^2 - 1} + 2 B_2 \right],$$

wo  $\zeta_0$  aus der Gleichung

$$\zeta_0 (\zeta_0^2 - 1) = \frac{b^2}{2 c^2}$$

zu bestimmen ist [vgl. (39)]. Die zweite Bestimmungsgleichung wird daher wegen (63)

$$\operatorname{tg} \delta_0 = (\operatorname{tg} \delta)_{\zeta_0} = \frac{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}}{2 \zeta_0^2 - 1} \quad (66)$$

nach Vereinfachung

$$\frac{B_1}{c} \frac{3 \zeta_0^2 - 2}{\zeta_0^2 - 1} + B_2 \left[ \frac{1}{2} Q_1 \zeta_0 (3 \zeta_0^2 - 1) + 3 \right] = \frac{1}{4} \zeta_0 (3 \zeta_0^2 - 1). \quad (67)$$

Mit Hilfe der Gl. (65) und (67) erhält man dann die in der Tabelle 4 zusammengestellten Werte der Konstanten für eine Reihe von Werten des Verhältnisses  $\frac{b}{c}$ .

Tabelle 4. Berechnung der Trägheitskoeffizienten  $k_1$  und  $k_2$ .

$\frac{b}{c}$	$\frac{B_1}{c}$	$B_2$	$\frac{L}{J}$	$k_1 = \frac{K}{J}$	$k_2$	$k_2 - k_1$
0·2	0·01168	— 0·001975	34·289	0·063	0·908	0·845
0·4	0·04505	— 0·00864	8·5362	0·119	0·842	0·723
0·6	0·0957	— 0·01953	3·7942	0·167	0·778	0·611
0·8	0·1493	— 0·02582	2·1444	0·208	0·721	0·513
1·0	0·2144	— 0·03408	1·3652	0·241	0·678	0·437

Wenn man andere Punkte wählt, ergeben sich nur geringe Abweichungen von den berechneten Konstanten, so daß die Näherung als praktisch ausreichend angesehen werden kann. Eine weitere Näherung kann man dadurch erhalten, daß man durch Hinzufügung etwa einer Dipolstrecke mit konstanter Verteilungsdichte eine weitere Konstante aufnimmt und zur Bestimmung der drei Konstanten  $B_0 B_1 B_2$  die Tangentialbedingung für drei Punkte der Kurve  $C$  in Ansatz bringt.

### VIII. Ermittlung des Trägheitskoeffizienten $k_2$ der Querbewegung.

Auf Grund der Entwicklungen im ersten Bericht ergibt sich der Koeffizient  $k_2$  aus der Formel

$$k_2 = - \frac{\int F_2 \eta dx}{\int \eta^2 dx}, \quad (68)$$

wobei die auftretenden Integrale über die Meridiankurve zu erstrecken sind wie im oben behandelten Falle der Längsbewegung. Nun erhält man aber für den Wert der Funktion  $F_2$  in den Punkten der Kurve  $C$  bei der Benutzung der Gl. (39)

$$(F_2) = 2 B_2 \eta Q_1 - \frac{4 c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right) \eta. \quad (69)$$

Der Ausdruck setzt sich aus einem mit  $\eta$  proportionalen Glied und einem vom Produkt  $\eta Q_1$  abhängigen Glied zusammen. Das für die Berechnung von  $k_2$  maßgebende Integral wird daher

$$-\int F_2 \eta dx = \frac{4 c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right) \int \eta^2 dx - 2 B_2 \int \eta Q_1 dx,$$

womit der Koeffizient  $k_2$  den Wert

$$k_2 = \frac{4 c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right) - 2 B_2 \cdot \frac{\int \eta^2 Q_1 dx}{\int \eta^2 dx} \quad (70)$$

erhält. Da das mit dem Volumen des Rotationskörpers verhältnisgleiche Integral

$$\int \eta^2 dx$$

bereits bestimmt ist, kommt die weitere Rechnung auf die Ermittlung des Integrals

$$L = \int \eta^2 Q_1 dx = \int \eta^2 \left( \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) dx \quad (71)$$

hinaus, das, wie man zeigen kann, in geschlossener Form ausgewertet werden kann. Setzt man für  $\eta^2 dx$  die früher gefundenen Ausdrücke ein, drückt also alle Größen durch die Koordinate  $\zeta$  aus, so kommt

$$L = c^3 \int_1^2 \left[ \frac{2 b^2}{c^2} \zeta^2 + \frac{b^4 \zeta}{c^4 (\zeta^2 - 1)^2} - \frac{b^6 (\zeta^2 + 1)}{8 c^6 (\zeta^2 - 1)^3} - 2 \zeta (\zeta^2 - 1)^2 - \frac{b^2}{2 c^2} (\zeta^2 + 1) \right] \cdot \left[ \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right] d\zeta. \quad (72)$$

Benutzt man die früher angegebenen und die weiteren Integralformeln

$$\begin{aligned} \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2 - 1)^2} &= -\frac{1}{2} Q_1; & \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2 - 1)^3} &= \frac{3}{8} Q_1 - \frac{1}{4} \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1)^2}; \\ \int \frac{(\zeta^2 + 1) \zeta d\zeta}{(\zeta^2 - 1)^3} &= -\frac{\zeta^2}{2 (\zeta^2 - 1)^2}; & 2 \int \frac{(\zeta^2 + 1) \zeta d\zeta}{\zeta^2 - 1} &= \zeta^2 + 2 \lg (\zeta^2 - 1); \\ \int \frac{(\zeta^2 + 1) \zeta d\zeta}{(\zeta^2 - 1)^4} &= -\frac{3 \zeta^2 + 1}{12 (\zeta^2 - 1)^3}, \end{aligned} \quad (73)$$

so erhält man nach Zusammenfassung und bei Einführung von

$$Q_0 = \frac{1}{2} \zeta \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - 1; \quad Q_1 = -\frac{dQ_0}{d\zeta} = \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$$

den folgenden Ausdruck für das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^3} L &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{b^2}{c^2} [\zeta (\zeta^2 - 1) Q_1 + \lg (\zeta^2 - 1)] + \frac{1}{4} \frac{b^4}{c^4} \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1)^2} - \frac{1}{8} \frac{b^4}{c^4} \frac{(3 \zeta^2 + 1)}{\zeta^2 - 1} Q_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^6}{24 c^6 (\zeta^2 - 1)^3} - \frac{b^6}{16 c^6} \left[ \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} Q_0 + \frac{1}{4} Q_1^2 \right] - \frac{1}{3} (\zeta^2 - 1)^3 Q_1 + \frac{2}{3} \zeta \left( 1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \right\}_1^2, \end{aligned} \quad (74)$$

der schließlich noch vereinfacht werden kann, wenn man die für beide Grenzen gültige Beziehung

$$\frac{b^2}{c^2} \zeta (\zeta^2 - 1) - (\zeta^2 - 1)^3 - \frac{1}{4} \frac{b^4}{c^4} = 0 \quad (75)$$

benutzt. So entsteht

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^3} L &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{b^2}{c^2} \lg (\zeta^2 - 1) - \frac{1}{4} \frac{b^4}{c^4} \frac{(\zeta^2 + 1)}{\zeta^2 - 1} Q_1 + \frac{5}{12} \frac{b^4}{c^4} \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^6}{16 c^6} \left[ \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} Q_0 + \frac{1}{4} Q_1^2 \right] + \frac{1}{6} (\zeta^2 - 1)^3 Q_1 + \frac{2}{3} \zeta \left( 1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \right\}_1^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Damit gewinnt man für den Trägheitskoeffizienten  $k_2$  den Wert

$$k_2 = \frac{4 c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right) - 2 B_2 \frac{L}{J}. \quad (77)$$

### IX. Ergebnisse der Rechnung.

Wir haben die für die Bestimmung der Trägheitskoeffizienten notwendigen Hilfsgrößen in den Tabellen 2, 3 und 4 zusammengestellt, insbesondere die Koordinaten der benutzten ausgezeichneten Punkte der Meridiankurve  $C$ , die Integrale  $J$ ,  $K$ ,  $L$  und die aus der Tangentialbedingung gewonnenen Konstanten  $\frac{B_1}{c}$ ,  $B_2$  in dem Potential der Querströmung. Die Tabelle 4 gibt dann die Werte der Koeffizienten  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_2 - k_1$ . Bei der Bewertung der Ergebnisse interessiert vor allem der Einfluß auf die Trägheitskräfte bei beschleunigter Bewegung und auf das instabile Moment um die Hochachse bei einer Kursabweichung von der Längsachse. Bei Auftreten einer Beschleunigung in der Längs- bzw. Querrichtung werden die Trägheitswiderstände

$$W_1 = k_1 \varrho V \dot{v}_1; \quad W_2 = k_2 \varrho V \dot{v}_2, \quad (78)$$

wo  $k_1 \varrho V$  bzw.  $k_2 \varrho V$  auch als die den beiden Richtungen zugeordneten scheinbaren Massenkomponenten bezeichnet werden. Bei einer Horizontalbewegung unter dem Winkel  $\beta$  gegen die als horizontal vorausgesetzte Längsachse entsteht ferner das Drehmoment um die Hochachse

$$M = \frac{1}{2} \varrho U^2 \sin 2\beta (k_2 - k_1) V, \quad (79)$$

wenn

$$v_1 = U \cos \beta, \quad v_2 = U \sin \beta$$

die Bewegungsgeschwindigkeiten in der Längs- und Querrichtung bezeichnen. Für den dimensionslosen Beiwert hat man

$$c_m = (k_2 - k_1) \sin 2\beta = \frac{M}{\frac{1}{2} \varrho U^2 V}. \quad (80)$$

Aus den Ausdrücken von  $W_1$  und  $W_2$  und  $M$  ergibt sich, daß es am zweckmäßigsten ist, als Vergleichskörper ein Ellipsoid zu wählen, das mit dem ovalen Rotationskörper das Volumen und etwa die Länge  $l$  gemeinsam hat. Dann ergibt die Differenz  $k_2 - k_1$  direkt eine Handhabe für den Vergleich der bei gleichbleibendem Winkel  $\beta$  entstehenden Momente beider Körper. Die Länge der benutzten Rotationskörper, bezogen auf die Grundstrecke  $c$ , ist

$$\frac{l}{2} = \zeta_1 + \zeta_2.$$

Benutzen wir das bereits bestimmte Volumen  $V$ , so ergibt sich aus

$$V = \frac{4}{3} \pi b'^2 \frac{l}{2}$$

als kleine Achse  $b'$  des Vergleichs-ellipsoids

$$\frac{b'}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{3V}{2\pi l}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{3J}{2l}}. \quad (81)$$

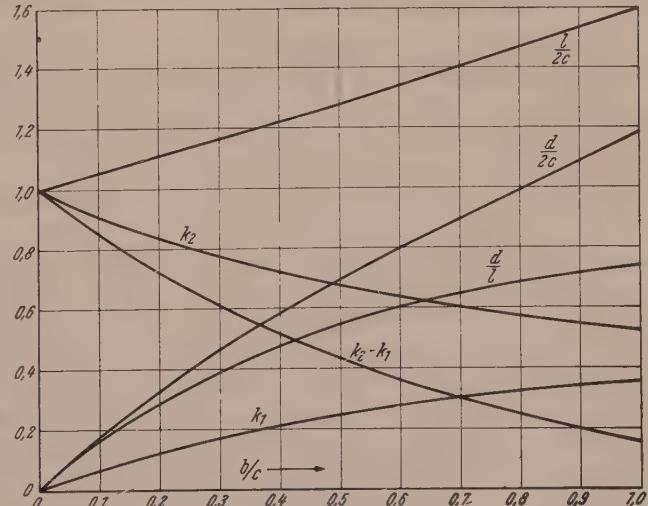
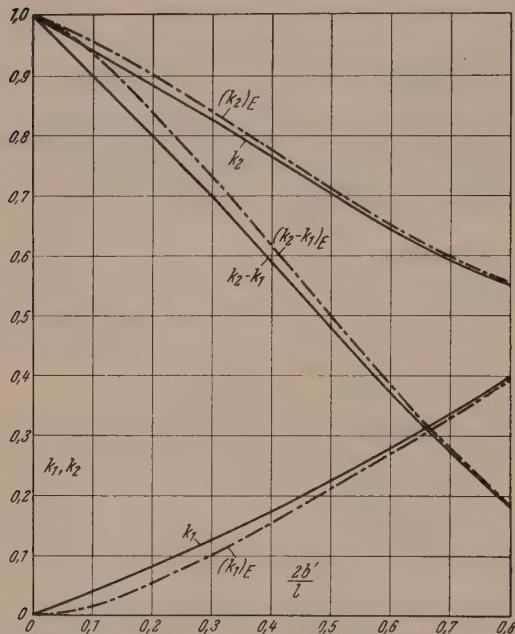


Abb. 4. Abmessungen u. Koeffizienten der Rotationskörper.

Tabelle 5. Werte für das Ellipsoid gleicher Länge und gleichen Volumens.

$\frac{b}{c}$	$\frac{3V}{2\pi l}$	$\frac{b'}{c}$	$\frac{2b'}{l}$	$(k_1)_E$	$(k_2)_E$	$(k_2 - k_1)_E$
0.2	0.02685	0.16385	0.1560	0.038	0.920	0.882
0.4	0.09703	0.3115	0.2818	0.097	0.849	0.752
0.6	0.19901	0.4461	0.3839	0.148	0.783	0.635
0.8	0.3253	0.5738	0.4701	0.193	0.726	0.533
1.0	0.4727	0.6876	0.5370	0.228	0.683	0.454

Abb. 5. Vergleich der Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  mit den Werten beim Ellipsoid gleicher Länge und gleichen Volumens.

Aus dem damit bestimmten Achsenverhältnis des Ellipsoids erhält man dann aus den früher angegebenen Formeln die Werte für die Trägheitskoeffizienten  $(k_1)_E$  und  $(k_2)_E$ . Das Ergebnis ist in der Tabelle 5 wiedergegeben. Ferner haben wir in Abb. 4 die Abmessungen und Koeffizienten in Abhängigkeit von  $b/c$  und der Abb. 5 die Werte der Koeffizienten für das Ovaloid und das zugeordnete Ellipsoid in Abhängigkeit vom Verhältnis  $\frac{2b'}{l}$  zur Anschauung gebracht. Man sieht, daß die Koeffizienten  $k_1$  bzw. die Trägheitswiderstände bei der Längsbewegung größer und die Koeffizienten  $k_2$  bzw. die zugehörigen Trägheitskräfte bei der Querbewegung etwas kleiner ausfallen als die entsprechenden Größen des Vergleichsellipsoids. Der Unterschied ist am stärksten bei den schlanken Formen, bei denen gleichzeitig das Breitenmaximum nach vorne verlagert ist, während mit wachsendem  $b$  die Differenz in dem Maße verschwindet, wie die Rotationsform sich dem Ellipsoid annähert, was

gleichzeitig als Bestätigung der Rechnung anzusehen ist. Wichtig ist für uns vor allem, daß die dem Moment verhältnisgleiche Größe  $k_2 - k_1$  gegenüber dem entsprechenden Wert beim Ellipsoid verkleinert wird, besonders bei ovalartigen Rotationsformen, die im großen und ganzen, das heißt im Schlankheitsverhältnis und in der ungefährten Lage des größten Querschnittes den gangbaren Rumpfformen des Flugzeuges entsprechen. Theoretisch und ohne Rücksicht auf die Reibung würde sich also das merkwürdige Resultat ergeben, daß diese Rumpfformen eine geringere Instabilität besitzen oder leichter zu steuern sind als ellipsoidische Formen gleicher Länge und gleichen Volumens. Das ist auch insofern ein bemerkenswertes Ergebnis, als gerade Rotationskörper dieser Art, also mit „stromlinienartigem“ Umriß, auch durch ein relatives Minimum des Formwiderstandes ausgezeichnet sind. Wie der Verfasser in einem weiteren Bericht zeigen wird, bleibt das Ergebnis im wesentlichen auch für Formen gültig, die sich von den ovalartigen Rotationskörpern durch eine stärkere Ausbildung des Kopfes unterscheiden. Wenn sich also in der Wirklichkeit oder beim Versuch andere Wirkungen zeigen, so kann nur die Reibung dafür verantwortlich gemacht werden.

### X. Beziehung der Koeffizienten zu den Geschwindigkeiten.

Wie ich bereits im ersten Bericht bemerkt habe, lassen die Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  im Falle des Ellipsoids eine einfache Deutung zu, die zu einer interessanten Abschätzung im allgemeinen Falle führt. Es läßt sich nämlich zeigen, daß beide Koeffizienten mit den Faktoren identisch sind, mit denen man die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  der Längs- bzw. Querbewegung multiplizieren muß, um die absoluten Geschwindigkeiten am Äquator bzw. an den Polen oder Scheiteln des Ellipsoids zu erhalten. Abgesehen vom Vorzeichen, hat man daher bei der Längsbewegung an der breitesten Stelle die Relativgeschwindigkeit

$$v_x' = v_1(1 + k_1).$$

Bei der Querströmung entstehen ferner in den Scheitelpunkten des Ellipsoids in der Symmetrieebene  $\varphi = 0$  die relativen Maximalgeschwindigkeiten

$$|v_z'| = v_2(1 + k_2).$$

Um nun z. B. das Verhältnis

$$k_1' = \left| \frac{v_x}{v_1} \right|_{\eta_{\max}}$$

für den Fall der Längsbewegung des ovalen Körpers zu berechnen, gehen wir aus von dem allgemeinen Ausdruck

$$\frac{v_x}{v_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{b^2}{c^2} \frac{1}{\zeta - \mu} \left[ \frac{\zeta \mu - 1}{(\zeta - \mu)^2} - \frac{\mu}{\zeta + \mu} \right] \quad (82)$$

und benutzen die unter (64) gegebene Beziehung für die Koordinaten  $\bar{\zeta} \mu$  des Punktes der Meridiankurve mit größtem Abstand von der Achse. Man erhält dann nach Vereinfachung

$$k_1' = \frac{1}{4} \frac{b^2}{c^2} \frac{1}{\zeta (\bar{\zeta} - \mu)} = \frac{c^2}{b^2} \frac{(\bar{\zeta}^2 - 1)^2}{\bar{\zeta}}. \quad (83)$$

Ebenso erhalten wir aus der größten Geschwindigkeit längs des Äquatorkreises bei der Querbewegung

$$k_2' = -\frac{F_2}{\eta} = \left| \frac{v_\varphi}{v_2} \right|_{\eta_{\max}} = -2 B_2(Q_1)_{\bar{\zeta}} + \frac{4 c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right), \quad (84)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

Weiter entstehen aus (62) für die auf die Scheitelpunkte bezogenen Geschwindigkeitsverhältnisse bei Benutzung von (39) die einfachen Ausdrücke

$$k_2'' = -2 B_2(Q_1)_{\zeta_2} + 4 \frac{c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right), \quad (85)$$

$$k_2''' = -2 B_2(Q_1)_{\zeta_1} + 4 \frac{c^2}{b^2} \left( \frac{B_1}{c} + 2 B_2 \right).$$

Tabelle 6. Vergleich mit den Geschwindigkeiten am Äquator und an den Polen (Scheitelpunkten).

$\frac{b}{c}$	$k_1' = \left  \frac{v_x}{v_1} \right _{\eta_{\max}}$	$k_1$	$(k_1)_E$	$k_2'' = \left  \frac{v_\eta}{v_2} \right _{\mu=1}$	$k_2$	$k_2'$	$k_2''' = \left  \frac{v_\eta}{v_2} \right _{\mu=-1}$
0·2	0·090	0·063	0·038	0·789	0·908	0·832	1·160
0·4	0·152	0·119	0·097	0·722	0·842	0·776	1·099
0·6	0·197	0·167	0·148	0·666	0·778	0·719	1·015
0·8	0·234	0·208	0·193	0·644	0·721	0·693	0·883
1·0	0·266	0·241	0·228	0·617	0·678	0·659	0·805

Aus der Tabelle 6, in der die sieben Werte  $k_1$ ,  $k_1'$ ,  $(k_1)_E$ ,  $k_2$ ,  $k_2'$ ,  $k_2''$ ,  $k_2'''$  zusammen gestellt sind, erkennt man, daß z. B. die Trägheitskoeffizienten  $k_1$  zwischen den Werten  $k_1$  und  $(k_1)_E$  liegen oder daß die Ungleichung

$$(k_1)_E < k_1 < k_1' \quad (86)$$

besteht, so daß man berechtigt ist, bei Kenntnis dieser Werte ihr arithmetisches Mittel als Annäherung für  $k_1$  zu benutzen. Was die Querströmung angeht, so stellen die beiden Scheitelpunkte  $k_2''$  und  $k_2'''$  zwei Extremwerte dar, die zugleich die obere und untere Grenze sowohl für die Trägheitskoeffizienten  $k_2$  (und  $k_2'$ ) wie auch für den entsprechenden Ellipsenwert  $(k_2)_E$  bilden. Daß z. B.

$$k_2'' < k_2 < k_2''' \quad (87)$$

wird, sieht man übrigens ohne weiteres ein, wenn man die Ausdrücke (84) mit (70) vergleicht und berücksichtigt, daß  $(Q_1)_{\zeta_2}$  der kleinste Wert von  $Q_1$  und  $(Q_1)_{\zeta_1}$  der größte Wert von  $Q_1$  auf der Meridiankurve darstellt. Aus der Ungleichung

$$(Q_1)_{\zeta_2} < \frac{\int \eta^2 Q_1 dx}{\int \eta^2 dx} < (Q_1)_{\zeta_1}$$

ergibt sich dann sofort die obige Ungleichung für die Koeffizienten. Wenn  $\frac{b}{c}$  wächst, so nähert sich der Rotationskörper mehr und mehr der ellipsoidischen Form und schließlich der Kugel mit unendlich großem Halbmesser. Dabei rücken die oberen und unteren Grenzen immer weiter zusammen, um schließlich in den Grenzwert

$$k_1 = k_1' = k_2 = k_2' = k_2'' = 0.5$$

überzugehen.

## XI. Schlußbemerkung.

Mit Hilfe der angegebenen Methode dürfte es nicht schwer sein, weitere Rotationsformen durchzurechnen. Um z. B. den Einfluß einer besonderen Buggestaltung auf das Moment zu bestimmen, kann man den bisher benutzten Singularitäten weitere einfache Quell- und Dipolelemente hinzufügen. Bei Anbringung eines einfachen punktförmigen Dipols in dem Endpunkt  $C_2$  der Grundstrecke erhält z. B. der Kopf des Rotationskörpers eine kugelförmige Ausweitung, während bei entgegengesetzter Richtung des Dipols der vordere Teil der Begrenzung verengt bzw. eingezogen wird. Wenn es auch im allgemeinen nicht möglich sein wird, bei solchen zusammengesetzten Fällen die auftretenden Integrale wie im vorliegenden Fall in geschlossener Form darzustellen, so bietet doch die allgemein begründete Zurückführung der Momentenberechnung auf einfache Flächenauswertung eine wesentliche Erleichterung der gesamten Zahlenrechnung. Ich hoffe, in einem weiteren Bericht einige praktisch bemerkenswerte Ergebnisse mitzuteilen, insbesondere auch die Frage nach dem Einfluß einer Ausweitung des Rumpfkopfes auf die Stabilität zu behandeln.

(Eingegangen am 3. Juni 1954.)

## Kegelige Überschallströmung in Schallnähe.

Von K. Oswatitsch und L. Sjödin, Stockholm.

Mit 4 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Die üblichen Tabellen oder Kurvenblätter für die Überschallströmung an axial angeströmten Kreiskegeln reichen in Schallnähe nicht aus, weil sie nicht genügend dicht gerechnet sind. Die Herleitung entsprechender Tabellen und Kurven unter den in Schallnähe zulässigen und üblichen Vernachlässigungen für schlanke Kegel in dieser Arbeit gestattet die Rückführung der Resultate auf einen einzigen aus Kegelöffnungswinkel und einer Machzahlfunktion gebildeten Parameter für alle Verhältnisse der spezifischen Wärmen. Die Darstellung enthält

die Ähnlichkeitsgesetze für Schallnähe und gestattet gewisse formelmäßige Aussagen, wie etwa für die Machzahl der Kopfwellenablösung. Mit dem Äquivalenzsatz für Schallnähe können die Ergebnisse auf Kegel beliebiger Querschnittsform und auf die Spitzen von Deltaflügeln übertragen werden.

**Summary.** The usual numerical tables and charts for axial supersonic flow around circular cones are inadequate in the sonic range because there is a lack of calculated data in this region. By deriving tables and curves under such assumptions as are permissible and usual for slender cones in the sonic range, the results can be reduced to a single parameter which is derived from the cone aperture angle and a function of the Mach number for all specific heat ratios. The similitude laws for the sonic range are included, and some formulae are given, as, for instance, for the Mach number at the bow wave separation. By means of the equivalence theorem for the sonic range, the results may be transferred to cones of arbitrary cross-section, and also to delta wing tips.

**Résumé.** Les tableaux et graphiques usuels pour un courant plus rapide que le son le long des cônes circulaires exposés à un courant axial ne suffisent pas au voisinage de la vitesse du son, car ils sont calculés avec des intervalles trop larges. On trouve dans ce travail la déduction des tableaux et graphiques appropriés, les termes négligeables usuels pour les cônes aigus au voisinage de la vitesse du son étant omis. Cette déduction permet de ramener les résultats à un paramètre unique calculé à l'angle au sommet du cône et une fonction du nombre de Mach, pour tous les rapports des chaleurs spécifiques. L'étude comprend les théorèmes de similitude au voisinage de la vitesse du son, et permet d'énoncer certaines formules comme par exemple celle relative au nombre de Mach de séparation des ondes de choc. Avec le théorème d'équivalence au voisinage de la vitesse du son, les résultats peuvent être appliqués à des cônes de toute section et à la pointe d'une aile delta.

### I. Einleitung.

Die Überschallströmung an Kreiskegeln ist vielfach berechnet worden. In diesem Zusammenhang braucht nur auf die in allen einschlägigen Lehrbüchern zitierten Arbeiten von G. J. Taylor-J. W. Macoll, A. Busemann und auf die Tabellen von Z. Kopal hingewiesen werden. Dabei handelt es sich stets um die numerische Integration einer gewöhnlichen, nicht linearen Differentialgleichung, die keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bietet, wenn auch zwischen Kopfwelle und Kegelmantel in Schallnähe Übergänge von Überschall- zu Unterschallströmungen auftreten. Wenn das Problem der Überschallströmung von Kreiskegeln für beliebig dünne Körper und für Machzahlen der Anströmung  $M_\infty$  beliebig nahe an Eins ( $M_\infty \rightarrow 1$ ) demnach grundsätzlich gelöst erscheint, solange nur die Kopfwelle anliegt, so besteht dennoch ein besonderer Bedarf für die Lösungen bei schlanken Kegeln in Schallnähe. In diesem Gebiete reichen die vorhandenen Tabellen und Diagramme in keiner Weise aus. Aus diesen lassen sich keine allgemein gültigen Formeln und Ähnlichkeitsgesetze für Schallnähe ableiten und es fehlt der Anschluß an die üblichen Methoden für schlanke Körper in Schallnähe.

Was diesen ersten und längeren Teil der Arbeit angeht, handelt es sich also um die methodische Aufgabe der Darstellung der kegeligen Strömung an Kreiskegeln in Schallnähe. Dabei unterscheiden sich die Resultate nur in ihrer Darstellungsweise von einer schon früher ausgeführten, aber nur in Berichtsform vorhandenen Arbeit von v. Baranoff<sup>1</sup>.

Ausgehend von der Kreiskegelströmung ist es dann nicht mehr schwer, mit Hilfe des Äquivalenzsatzes von Oswatitsch<sup>2</sup> Aussagen über beliebige kegelige Strömungen in Schallnähe zu machen. Über den Inhalt vorliegender Arbeit wurde auf der GaMM-Tagung in München (1954) referiert.

<sup>1</sup> v. Baranoff: Similitude transsonique pour les corps de révolution minces sans incidence. ONERA NT 1/1329 A 1952.

<sup>2</sup> K. Oswatitsch und F. Keune: Ein Äquivalenzsatz für nicht angestellte Flügel kleiner Spannweite in schallnaher Strömung (in Druck).

## II. Ausgangsgleichungen für die Kreiskegelströmung.

Die Differentialgleichungen und die Stoßgleichungen für Schallnähe haben unterschiedliche Darstellungen gefunden, die sich jedoch nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Der Einfachheit halber sei hier von der Darstellung im Buche „Gas-dynamik“ des ersten Verfassers<sup>3</sup> ausgegangen. Ist  $x$  die Kegelachse und  $y$  die Querkoordinate und sind  $u, v$  die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten, so seien mit  $u_\infty$  und  $\alpha_\infty$  als Geschwindigkeit und als Machwinkel in der Anströmung und mit  $c^*$  als kritischer Schallgeschwindigkeit folgende schallnahe Größen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_\infty &= \sqrt{M_\infty^2 - 1}; & \eta &= y \operatorname{ctg} \alpha_\infty; \\ u &= \frac{u - u_\infty}{u_\infty - c^*}; & v &= \frac{v}{u_\infty - c^*} \operatorname{tg} \alpha_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

In diesen Größen schreibt sich die für Schallnähe vereinfachte gasdynamische Gleichung für Achsensymmetrie und die Gleichung der Wirbelfreiheit:

$$(1 + u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial(v \eta)}{\partial \eta} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Machzahl  $M = 1$  entspricht dabei dem Werte  $u = c^*$ , das heißt nach Gl. (1)  $u = -1$  und das bedeutet das Verschwinden des ersten Koeffizienten in Gl. (2) oder einem Wechsel vom Hyperbolischen zum Elliptischen im System (2), (3).

Bei einer Kreiskegelströmung hängen die Geschwindigkeitskomponenten nur von einer einzigen Variablen ab, als welche gewählt sei:

$$\eta = \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \operatorname{ctg} \alpha_\infty. \quad (4)$$

Nun gilt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{du}{d\eta} \frac{\eta}{x}, & \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{du}{d\eta} \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{dv}{d\eta} \frac{\eta}{x}, & \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{dv}{d\eta} \frac{1}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Mit Gl. (5) geht das System (2), (3) über in

$$\eta^2 (1 + u) \frac{du}{d\eta} + \frac{d(v \eta)}{d\eta} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{du}{d\eta} + \frac{d(v \eta)}{d\eta} - \frac{v \eta}{\eta} = 0. \quad (7)$$

An diesem Gleichungssystem sind die bekannten Eigenschaften von  $v$  und  $u$  an der Achse  $\eta = 0$  leicht zu erkennen. Wenn  $u$  auf der Achse nicht stark singulär ist, so ist das Produkt  $v \cdot \eta$  in der Nähe von  $\eta = 0$  nach Gl. (6) offenbar konstant:

$$\eta \rightarrow 0: \quad v \cdot \eta = \psi(\eta) \rightarrow \psi(0). \quad (8)$$

Angenommen, auch  $d\psi/d\eta$  verschwindet für  $\eta \rightarrow 0$ , so folgt aus (7) für

$$\eta \rightarrow 0: \quad u = \psi(0) \ln \eta + \dots \quad (9)$$

Ein Einsetzen dieser logarithmischen Singularität in (6) zeigt, daß das Verhalten der Komponenten an der Achse durch Gl. (8) und (9) wirklich richtig getroffen ist.

Nun liegt die Oberfläche schlanker Kegel in Achsennähe. Die Werte auf der Achse sind daher sehr erwünscht, jedoch nicht von solchen Größen, welche wie  $u$  und  $v$  sich an der Achse stark ändern, ja über alle Grenzen wachsen. Daher seien die Komponenten durch zwei neue Variable ersetzt, welche in Achsennähe konstant

<sup>3</sup> K. Oswatitsch: Gasdynamik, S. 342ff. Wien: Springer-Verlag, 1952.

sind, in welchen also das singuläre Verhalten dort eliminiert ist. Als solche bieten sich mit Gl. (8) und (9) an:

$$\left. \begin{aligned} \psi(\eta) &= v(\eta) \cdot \eta, \\ \chi(\eta) &= u(\eta) - \psi(\eta) \ln \eta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

In  $\chi(\eta)$  steht vor dem Logarithmus nicht  $\psi(0)$  wie in Gl. (9), sondern das lokale  $\psi(\eta)$ . Wenn man davon absieht, ist jedoch  $\chi$  in Körpernähe im wesentlichen gleich jener Größe, welche in anderen Arbeiten vielfach als „Raumeinfluß“ bezeichnet wird<sup>4</sup>. In diesen Veränderlichen erhalten die Gl. (6) und (7) wohl eine etwas kompliziertere Form, welche jedoch nun frei ist von jeder Singularität im Integrationsgebiet. Nach elementarer Umformung erhält man:

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \psi \frac{\eta [1 + \chi + \psi \ln \eta]}{\eta^2 [1 + \chi + \psi \ln \eta] - 1}; \quad (11)$$

$$\frac{d\chi}{d\eta} = -\frac{d\psi}{d\eta} [1 + \ln \eta]. \quad (12)$$

Als Randbedingung auf der Achse sei dort der Wert von  $\psi$  vorgegeben:

$$\eta = 0: \quad \psi = \psi(0). \quad (13)$$

Er kann mit Gl. (10) und (1) auf den Kegelöffnungswinkel zurückgeführt werden, was später geschehen soll. Die übrigen Randbedingungen sind durch die Stoßgleichungen gegeben. Die Werte unmittelbar hinter dem Stoß werden durch ein Dach gekennzeichnet; dann gilt<sup>5</sup> mit  $\gamma$  als Stoßfrontwinkel:

$$\hat{v}^2 = \hat{u}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \hat{u} \right], \quad (14)$$

$$\hat{\eta} = \operatorname{ctg} \alpha_\infty \operatorname{tg} \gamma = -\frac{\hat{u}}{\hat{v}} = \left[ 1 + \frac{1}{2} \hat{u} \right]^{-1/2}. \quad (15)$$

Diese Bedingungen, in die neuen Veränderlichen übersetzt, lauten nach einiger Umrechnung:

$$\eta = \hat{\eta} = \left[ 1 - \frac{1}{2} \hat{\psi} \right]^{-1/2}: \hat{\chi} = -\hat{\psi} (1 + \ln \hat{\eta}). \quad (16)$$

Wie immer ist die Bedingung am Stoß dadurch gekennzeichnet, daß die Stoßlage  $\hat{\eta}$  von der Stoßstärke und damit von  $\hat{\psi}$  abhängt.

### III. Die Integration der Differentialgleichungen.

Wie schon im allgemeineren Fall, ist die Integration des Differentialgleichungssystems (11), (12) allgemein nicht möglich. Sie muß numerisch oder graphisch durchgeführt werden, wobei nicht von einer gegebenen Randbedingung auf der Achse (13) ausgegangen werden kann, da die Größe dort ja gesucht wird. Es wird daher, wie schon früher, der Wert hinter dem Stoß  $\eta = \hat{\eta}$  von  $\psi$  vorgegeben. Mit Gl. (16) folgt aus einem vorgegebenen Wert  $\hat{\psi}$ , die Stoßlage  $\hat{\eta}$  und der Wert  $\hat{\chi}$ . Mit diesen Anfangswerten kann die Integration des Systems (11), (12) schrittweise durchgeführt werden, woraus sich die Werte von  $\psi$  und  $\chi$  auf der Achse für  $\eta = 0$  ergeben. In Bereichen größerer Veränderlichkeit von  $\chi$  und  $\psi$  wurde Runge-Kuttas-Methode<sup>5</sup> angewendet, während im übrigen mit einer einfacheren Mittelwertmethode gearbeitet wurde. Die Rechnungen wurden für die Anfangswerte  $\hat{\psi} = 0.10, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00, 1.20, 1.40$  durchgeführt. Höhere Werte von  $\hat{\psi}$  haben keine praktische Bedeutung, da sich die maximalen

<sup>4</sup> F. Keune und K. Owatitsch: Nicht angestellte Körper kleiner Spannweite in Unter- und Überschallströmung. Z. f. Flugwissenschaften 1/6, 137—145 (1953).

<sup>5</sup> J. B. Scarborough: Numerical Mathematical Analysis. The John-Hopkins Press. 1930.

Kegelwinkel im Bereich  $1 \cdot 00 < \hat{\psi} < 1 \cdot 20$  ergeben. Die Ergebnisse sind in Tabellenform am Schluß der Arbeit und in Diagramm 1 wiedergegeben. In letzteres sind keine  $\eta$ -Werte aufgenommen.

Ausgehend von der Stoßpolaren  $\eta = \hat{\eta}$ ,  $\psi = \hat{\psi}$  steigen die Werte von  $\psi$  mit fallendem  $\eta$ , wenn Überschall

$$M > 1: \quad 0 < 1 + u = 1 + \chi + \psi \ln \eta \quad (17)$$

herrscht und fallen mit fallendem  $\eta$  im Unterschallgebiet. Im  $\chi, \psi$ -Diagramm 1 ist die Schallstelle durch eine deutliche Spitze in den Kurven für einen bestimmten Stoßwert  $\hat{\psi}$  gekennzeichnet. Ausgehend vom Wert  $\hat{\psi}$  auf der Stoßpolare steigen die Werte von  $\psi$  (bei fallendem  $\chi$ ) an bis zum Erreichen der kritischen Geschwindigkeit und fallen dann zum Wert  $\psi(0)$  auf der Achse  $\eta = 0$  ab. Die Kurve dieser Endpunkte auf  $\eta = 0$  wird als „Apfelkurve“ bezeichnet, obwohl die Apfelform in Diagramm 1 nicht mehr zu erkennen ist. Jedoch werden aus dieser Kurve die Werte am Kegel entnommen. Die Apfelkurve schneidet in dieser Darstellung die Stoßpolare bei etwa  $\psi = 0.56$ .

Die lineare Lösung entspricht in der vorliegenden Darstellung kleinen Werten von  $u$  und  $v$  Gl. (1). Das bedeutet kleine Werte von  $\chi$  und  $\psi$  oder ein Streichen aller nicht linearen Glieder, das heißt der  $\chi$ - und  $\psi$ -Terme im Bruch von Gl. (11). Die Gleichungen lassen sich dann integrieren. Ebenso gut kann man die bekannten Resultate der linearen Theorie für die Kreiskegelströmung auf die neuen Variablen umschreiben. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(0) \sqrt{1 - \eta^2}; \\ \chi &= \psi(0) [(1 - \sqrt{1 - \eta^2}) \ln \eta - \ln(1 + \sqrt{1 - \eta^2})], \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

oder die Apfelkurve für die linearen Gleichungen:

$$\chi(0) = -\psi(0) \ln 2. \quad (19)$$

Auch diese Gerade ist in Diagramm 1 eingetragen. Wie erforderlich, ist sie die Tangente an die schallnahe Apfelkurve im Punkte  $\psi = \chi = 0$ .

Damit läßt sich auch gleich der Unterschied von schallnaher und linearer Lösung ablesen. Der Einfluß der nicht linearen Glieder auf  $\chi$  ist wesentlich größer als auf die  $u$ -Komponente, weil das logarithmische Glied in Gl. (10) den Hauptanteil liefert. Man sieht in Diagramm 1 den Fehler der nicht linearen Theorie „unter der Lupe“, tatsächlich ist letztere nicht so schlecht.

#### IV. Auswertung der Resultate für Kreiskegel.

Angenommen der halbe Öffnungswinkel des Kreiskegels  $\vartheta$  ist gegeben, so gewinnt man den entsprechenden  $\eta$ -Wert mit Gl. (4):

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \eta = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{ctg} \alpha_\infty = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}. \quad (20)$$

Mit einer in Schallnähe hohen Genauigkeit, die jene der Vereinfachung der gasdynamischen Gleichung übertreffen dürfte, kann nun  $\psi$  am Kegel dem Werte auf der Achse gleichgesetzt werden. Mit Gl. (10) und (1) gilt dann:

$$\psi(0) = \psi(\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{ctg} \alpha_\infty) = \eta \frac{v}{u} \operatorname{tg} \alpha_\infty \frac{u}{u_\infty - c^*} = \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{M_\infty^*}{M_\infty^* - 1} \left[ 1 + \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \right]. \quad (21)$$

$\psi(0)$  ergibt sich also aus dem halben Öffnungswinkel  $\vartheta$  und der Machzahl der Anströmung, die hier nicht selbst, sondern über

$$M_\infty^* = \frac{u_\infty}{c^*}$$

eingeht. Ferner steht in der Klammer neben 1 als kleine Korrektur die Störung der  $u$ -Komponente. Dieses Glied kann iterativ berücksichtigt werden, was im allgemeinen sinnvoll sein dürfte. Jedenfalls steckt in der Vernachlässigung dieses Gliedes der größte Fehler, so daß sich aus diesem Term ein oberes Maß für den Fehler ergibt. Für schlanke Kegel kann die eckige Klammer durch 1 ersetzt werden, womit dann die Lösung im Sinne der Ähnlichkeitsgesetze für Schallnähe nur von einem einzigen aus  $\operatorname{tg} \vartheta$  und  $M_\infty^*$  gebildeten Parameter abhängt.

Mit Gl. (1) und (10) kann nun die  $u$ -Komponente angegeben werden, indem  $\chi$  am Kegel wieder dem Werte  $\chi(0)$  auf der Achse gleichgesetzt und dieser der Apfelkurve in Diagramm 1 entnommen wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty} &= \frac{u_\infty - c^*}{u_\infty} [\chi + \psi \ln \eta]; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{y}{x}; \frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \frac{M_\infty^* - 1}{M_\infty^*} [\chi(0) + \psi(0) \ln (\operatorname{tg} \vartheta \cdot \operatorname{ctg} \alpha_\infty)]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ist die Lösung für das lineare Problem bekannt, so kann auch der Unterschied zu dieser aus Diagramm 1 abhängig von  $\psi(0)$  entnommen werden (Index L: linear):

$$\frac{u - u_L}{u_\infty} = \frac{M_\infty^* - 1}{M_\infty^*} [\chi(0) - \chi_L(0)]. \quad (23)$$

Zur Erleichterung der Arbeit sei eine Tabelle für die in dieser Arbeit auftretenden Machzahlfunktionen für das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\nu = 1.400$  aufgestellt. Die Resultate dieser Arbeit gelten jedoch für alle Verhältnisse der spezifischen Wärmen  $\nu$ , wenn man von dieser Tabelle absieht. Die übrigen Diagramme und Tabellen sind ohne irgendeine Voraussetzung über die Größe von  $\nu$  berechnet. Dieses erscheint in den Formeln nur implizit, indem — wie in Gl. (22) — neben dem Werte von  $M_\infty^*$  auch  $\operatorname{ctg} \alpha_\infty$  auftritt.

Von größerem Interesse ist auch der Stoßfrontwinkel  $\gamma$ . Er läßt sich mit Gl. (15) aus  $\hat{\eta}$  berechnen:

$$\operatorname{tg} \gamma = \hat{\eta} \cdot \operatorname{tg} \alpha_\infty. \quad (24)$$



Abb. 1. Reduzierter Stoßfrontwinkel.

#### Machzahlfunktionen für $\nu = 1.400$ .

$M_\infty \dots$	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.12	1.14	1.16	1.18	1.20
$M_\infty^* \dots$	1.00	1.017	1.033	1.049	1.065	1.081	1.097	1.113	1.128	1.143	1.158
$\cot \alpha_\infty \dots$	0	0.201	0.286	0.352	0.408	0.458	0.504	0.547	0.588	0.626	0.663
$1 - 1/M_\infty^* \dots$	0	0.016	0.032	0.047	0.061	0.075	0.088	0.101	0.114	0.125	0.137
$\alpha_\infty \dots$	90°	78.6	74.1	70.6	67.8	65.3	63.2	61.3	59.6	58.0	56.5

Zu diesem Zweck ist in Abb. 1  $\hat{\eta}$  als Funktion von  $\psi(0)$  aufgetragen. Man sieht, daß  $\eta$  im Bereich der größten vorkommenden  $\psi(0)$ -Werte ganz erheblich vom Werte für den Machwinkel der Anströmung,  $\eta = 1$ , abweicht.

In der Näherung des die schallnahe Ähnlichkeit erfüllenden Hauptgliedes von Gl. (21) ist der maximal zulässige Kegelwinkel  $\vartheta_{\max}$  durch den Maximalwert von  $\psi(0)$  gegeben:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\max} = \sqrt{\frac{M_\infty^* - 1}{M_\infty^*}} \psi(0)_{\max} = 0.86 \sqrt{1 - \frac{1}{M_\infty^*}}. \quad (25)$$

Mit der Näherung im Bereich von  $M_\infty \rightarrow 1$  gilt [Gl. (IX, 2) in <sup>3</sup>]:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{M_\infty^*} &= \frac{1}{\nu + 1} (M_\infty^2 - 1) + \dots = \frac{1}{\nu + 1} \operatorname{ctg}^2 \alpha_\infty + \dots = \\ &= \frac{1}{\nu + 1} \operatorname{tg}^2 (90^\circ - \alpha_\infty) + \dots \end{aligned}$$

Dies in Gl. (25) eingeführt, ergibt, indem für kleine Winkel die Funktion  $\operatorname{tg}$  durch den Winkel selbst ersetzt wird,

$$\vartheta_{\max}^{\circ} = \frac{0.86}{\sqrt{\chi + 1}} (90^{\circ} - \alpha_{\infty}^{\circ}) + \dots = 0.55 (90^{\circ} - \alpha_{\infty}^{\circ}) + \dots \quad (26)$$

Der hochgestellte Index  $^{\circ}$  besagt, daß die Winkel in Grad einzusetzen sind. Der mittlere Teil der Formel gilt für beliebige Gase, der rechte nur für Luft. Für diese bewährt sich die Näherungsformel (26) auch noch sehr gut bis zu  $M_{\infty} = 1.20$ , also bis zu einer Machzahl, bei welcher die üblichen Überschalltabellen und -diagramme bereits ausreichende Dienste leisten. Auf die Tatsache, daß der maximale Kegelwinkel in Schallnähe proportional zu  $\operatorname{ctg} \alpha_{\infty}$  ist, hat bereits A. Busemann<sup>6</sup> hingewiesen, jedoch fehlte bisher eine Angabe über die Größe des Faktors.

Eine über die schallnahen Ähnlichkeitsgesetze hinausgehende Näherung würde auf folgendem Wege zum maximalen Kegelwinkel führen. Mit Gl. (21) und (22) wäre für einen beliebigen Winkel  $\vartheta$ :

$$\frac{M_{\infty}^*}{M_{\infty}^* - 1} \operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{\psi(0)}{1 + \frac{u - u_{\infty}}{u_{\infty}}} = \frac{\psi(0)}{1 + \frac{M_{\infty}^* - 1}{M_{\infty}^*} [\chi(0) + \psi(0) \ln(\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{ctg} \alpha_{\infty})]}.$$

Nun ist die Funktion  $\ln$  nicht sehr empfindlich auf kleine Fehler ihres Argumentes, weshalb an dieser Stelle die erste Näherung verwendet werden kann:

$$\frac{M_{\infty}^*}{M_{\infty}^* - 1} \operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{\psi(0)}{1 + \frac{M_{\infty}^* - 1}{M_{\infty}^*} \left[ \chi(0) + \psi(0) \frac{1}{2} \ln \left( \frac{M_{\infty}^* - 1}{M_{\infty}^*} \operatorname{ctg}^2 \alpha_{\infty} \psi(0) \right) \right]}. \quad (27)$$

Aus dieser Gleichung ist nun der Maximalwert von  $\operatorname{tg} \vartheta$  zu bestimmen, der sich jedoch vom Resultat der Gl. (25) nur wenig unterscheiden wird, weshalb der Aufwand kaum lohnt.

## V. Strömung an beliebigen Kegeln.

Für schlanke Kegel allgemeiner Querschnittsform, deren Spannweite überall erheblich kleiner ist als der örtliche Durchmesser des von der Spitze ausgehenden Machkegels der Anströmung (Abb. 2), kann der Äquivalenzsatz von Oswatitsch angewendet werden<sup>2</sup>. Nur von solchen Kegeln soll in dieser Arbeit die Rede sein. Da der Öffnungswinkel des Machkegels in Schallnähe ziemlich groß ist, sind ziemlich geringe Pfeilungen flacher Kegel zulässig.

Nach dem oben genannten Satz ist der Unterschied von gesuchter und linearer Lösung derselbe, wie von einem Kreiskegel gleichen örtlichen Querschnittes. Das bedeutet, daß auch in diesem allgemeinen Fall Formel (23) verwendet werden darf, wenn unter  $u$  und  $u_L$  nicht die Werte auf der Oberfläche des Kreiskegels, sondern irgendwelche Werte in Körernähe, beispielsweise auf der Oberfläche des allgemeinen Kegels von Abb. 2 verstanden werden. Dabei gehören die Werte von  $\chi(0)$  und  $\chi_L(0)$  zum Kreiskegel gleichen örtlichen Querschnittes  $Q(x)$ , also:

$$Q(x) = x^2 \pi \operatorname{tg}^2 \vartheta. \quad (28)$$

Nach dem Äquivalenzsatz ist nur das Hauptglied in Gl. (21) zu nehmen. Mit Gl. (28) ergibt sich demnach der Wert von  $\psi(0)$ , für welchen das zugehörige  $\chi(0)$  in der Apfelkurve aufzusuchen ist zu:

$$\psi(0) = \frac{Q_{xx}}{2 \pi} \frac{M_{\infty}^*}{M_{\infty}^* - 1}. \quad (29)$$

<sup>6</sup> A. Busemann: Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Lufo XIX/4, 137—144 (1942).

Die Verschiebung der Geschwindigkeitsverteilung durch die schallnahen Effekte ist in Abb. 3 für eine angenommene Geschwindigkeitsverteilung  $u_L$  an der Oberfläche eines allgemeinen Kegels skizziert. Die Ablösung der Kopfwelle bei Annäherung

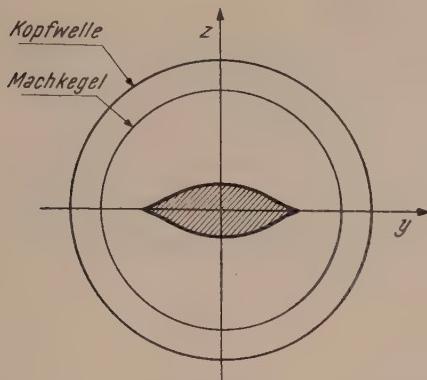


Abb. 2.  
Allgemeine Kegelströmung.

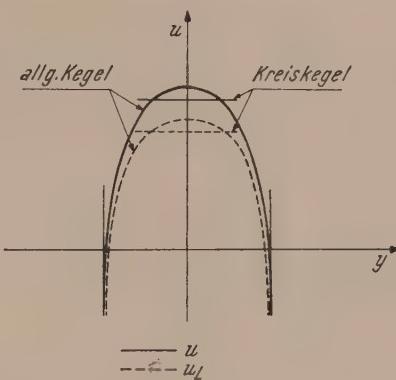


Abb. 3.  
Verschiebung der  $u$ -Verteilung in Schallnähe.

von  $M_\infty \rightarrow 1$  wird infolge von Grenzschichteffekten, Endlichkeit der Kegel und ähnlichem nicht genau an der Stelle maximal zulässigen Kegelquerschnittes erfolgen. Doch ist der maximal zulässige Kegelquerschnitt des unendlich lang gedachten Kegels

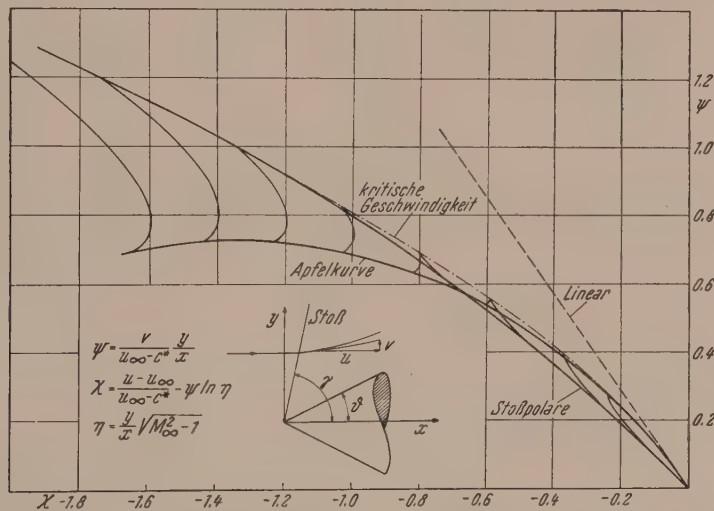


Abb. 4. Apfelkurve für Schallnähe.

sicher ein praktisch ausreichendes Kriterium für das Ablösen der Kopfwelle. Damit ist mit Gl. (29) [in Analogie zu Gl. (25)] die „Ablösungs-Machzahl“ gegeben durch:

$$1 - \frac{1}{M_{\infty}^*} = \frac{Q_{xx}/2\pi}{\psi_{\max}(0)} = 1.37 \frac{Q_{xx}}{2\pi}. \quad (30)$$

Aus der Machzahltafel kann das dazugehörige  $M_\infty$  entnommen werden.

Für die Frage der Ablösungsmachzahl eines Deltaflügels beliebiger Dickenverteilung oder für die Frage der  $u$ -Verteilung an der Spitze eines solchen Deltaflügels erweist

sich die Darstellung der Formeln mit  $Q_{xx}/2\pi$  überlegen einer Darstellung mit  $Q/x^2$ . Beide Werte sind ja für einen Kegel, Gl. (28), dieselben. Für die Spitze eines Deltaflügels braucht in (29) und (30) nur  $\left(\frac{Q_{xx}}{2\pi}\right)_{x=0}$  eingesetzt werden, ohne einen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0}$  bilden zu müssen, wie es bei  $Q/x^2$  erforderlich wäre. Damit ist auch die Frage nach der Ablösung von Kopfwellen bei Deltaflügeln praktisch beantwortet.

Tabelle 1. Schallnahe Kreiskegelströmung.

$\eta$	$\hat{\psi} = 1.40$			$\hat{\psi} = 1.20$			$\hat{\psi} = 1.00$			$\hat{\psi} = 0.80$		
	$-z$	$\psi$	$-z/\psi$									
1.8258	2.2428	1.4000	1.6020	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.800	2.2247	1.3887	1.6020	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.700	2.1558	1.3446	1.6033	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.600	2.0889	1.3000	1.6068	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.581	—	—	—	1.7498	1.2000	1.4582	—	—	—	—	—	—
1.500	2.0244	1.2552	1.6128	1.7196	1.1790	1.4585	—	—	—	—	—	—
1.414	—	—	—	—	—	—	1.3466	1.0000	1.3466	—	—	—
1.400	1.9627	1.2102	1.6218	1.6799	1.1501	1.4607	1.3465	0.9999	1.3466	—	—	—
1.300	1.9042	1.1652	1.6343	1.6401	1.1195	1.4650	1.3395	0.9945	1.3469	—	—	—
1.2911	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0043	0.8000	1.2554
1.200	1.8491	1.1202	1.6507	1.6003	1.0870	1.4722	1.3252	0.9828	1.3484	1.0286	0.8199	1.2545
1.100	1.7980	1.0754	1.6719	1.5618	1.0532	1.4829	1.3067	0.9665	1.3520	1.0386	0.8286	1.2534
1.000	1.7514	1.0309	1.6989	1.5254	1.0185	1.4977	1.2860	0.9468	1.3583	1.0388	0.8287	1.2535
0.900	1.7097	0.9870	1.7322	1.4919	0.9831	1.5175	1.2649	0.9245	1.3682	1.0334	0.8230	1.2557
0.800	1.6736	0.9439	1.7731	1.4620	0.9475	1.5430	1.2448	0.9003	1.3827	1.0249	0.8129	1.2611
0.700	1.6437	0.9019	1.8225	1.4366	0.9119	1.5754	1.2265	0.8747	1.4022	1.0154	0.7996	1.2699
0.600	1.6206	0.8613	1.8816	1.4166	0.8768	1.6156	1.2115	0.8483	1.4282	1.0064	0.7838	1.2840
0.500	1.6051	0.8227	1.9510	1.4029	0.8427	1.6648	1.2008	0.8216	1.4615	0.9994	0.7664	1.3040
0.400	1.5978	0.7867	2.0310	1.3964	0.8103	1.7233	1.1955	0.7954	1.5030	0.9957	0.7481	1.3310
0.300	1.5994	0.7544	2.1210	1.3979	0.7806	1.7908	1.1968	0.7707	1.5527	0.9967	0.7300	1.3653
0.200	1.6099	0.7271	2.2141	1.4078	0.7549	1.8649	1.2051	0.7487	1.6107	1.0032	0.7131	1.4069
0.100	1.6281	0.7068	2.3035	1.4253	0.7353	1.9383	1.2206	0.7315	1.6686	1.0156	0.6993	1.4523
0.000	1.6470	0.6973	2.3620	1.4442	0.7258	1.9898	1.2380	0.7228	1.7128	1.0300	0.6921	1.4882

$\eta$	$\hat{\psi} = 0.60$			$\hat{\psi} = 0.40$			$\hat{\psi} = 0.20$			$\hat{\psi} = 0.10$		
	$-z$	$\psi$	$-z/\psi$									
1.1952	0.7070	0.6000	1.1783	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.1181	—	—	—	0.4446	0.4000	1.1115	—	—	—	—	—	—
1.100	0.7589	0.6454	1.1759	0.4639	0.4175	1.1111	—	—	—	—	—	—
1.0541	—	—	—	—	—	—	0.2106	0.2000	1.0530	—	—	—
1.0260	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1026	0.1000	1.0260
1.000	0.7855	0.6706	1.1712	0.5275	0.4778	1.1040	0.2656	0.2534	1.0481	0.1333	0.1302	1.0238
0.900	0.7982	0.6840	1.1670	0.5594	0.5113	1.0491	0.3142	0.3043	1.0325	0.1847	0.1840	1.0038
0.800	0.8029	0.6897	1.1645	0.5768	0.5320	1.0842	0.3403	0.3353	1.0149	0.2098	0.2139	0.9808
0.700	0.8029	0.6895	1.1645	0.5854	0.5448	1.0745	0.3553	0.3562	0.9975	0.2243	0.2343	0.9573
0.600	0.8006	0.6854	1.1681	0.5894	0.5516	1.0685	0.3635	0.3706	0.9808	0.2327	0.2490	0.9345
0.500	0.7977	0.6781	1.1764	0.5904	0.5540	1.0657	0.3674	0.3803	0.9661	0.2369	0.2595	0.9129
0.400	0.7958	0.6686	1.1902	0.5902	0.5532	1.0669	0.3686	0.3863	0.9542	0.2384	0.2669	0.8932
0.300	0.7964	0.6578	1.2107	0.5904	0.5500	1.0735	0.3684	0.3894	0.9461	0.2381	0.2722	0.8747
0.200	0.8006	0.6468	1.2378	0.5922	0.5453	1.0860	0.3681	0.3903	0.9431	0.2371	0.2749	0.8625
0.100	0.8092	0.6372	1.2699	0.5967	0.5403	1.1044	0.3687	0.3897	0.9461	0.2362	0.2759	0.8561
0.000	0.8199	0.6318	1.2977	0.6032	0.5370	1.1233	0.3708	0.3887	0.9539	0.2364	0.2758	0.8571

(Eingegangen am 21. Juli 1954.)

# Strömung in einer Expansionsdüse mit Reibung.

Von C. Kämmerer, Wien.

Mit 7 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** In den meisten Lehrbüchern der technischen Wärmelehre<sup>1</sup> wird als Beispiel für eine reibungsbehaftete Düsenströmung die „polytropische“ Strömung herangezogen. Dieser Fall wird hier eingehend behandelt und die zugehörige Form der Düse ermittelt, die sich aber als praktisch nicht brauchbar erweist. Anschließend wird die günstigste Düsenform, nämlich jene mit kegeligem Erweiterungsteil erörtert sowie eine Beziehung zwischen dem Rohrreibungsbeiwert und dem Düsenwirkungsgrad abgeleitet.

**Summary.** Most textbooks on heating engineering refer to the polytropic flow as an example for a nozzle flow with frictional resistance. This case is dealt with in detail in the following paper, and the corresponding nozzle form is determined, the latter being of no practical use, however. Furthermore the nozzle type having a conical widening, which is the most favourable form, is discussed, and a relation is established between the pipe friction coefficient and the nozzle efficiency.

**Résumé.** Dans la plupart des traités de thermologie, on prend comme exemple de courant passant dans une tuyère et soumis à un frottement le courant «polytropique». Ce cas est ici traité à fond; la forme correspondante de la tuyère est déterminée, mais se révèle pratiquement inutilisable. On étudie ensuite la forme de tuyère la plus appropriée, c'est-à-dire celle dont la partie évasée prend la forme d'un cône, puis on établit un rapport entre le coefficient de frottement du tube et le rendement de la tuyère.

## I. Einleitung.

Es ist bekannt, daß bei einer Laval-Düse und Nichtberücksichtigung der Reibung eine bestimmte Form und Länge nicht ermittelt werden kann, wenn man von der Einhaltung eines gewissen Erweiterungswinkels  $\alpha$  absieht. Berücksichtigt man jedoch die Flüssigkeitsreibung z. B. nach dem üblichen Ansatz:

$$\Delta p_r = \gamma \frac{w^2}{2g} \lambda \frac{\Delta x}{2r}, \quad (1)$$

[wobei  $\Delta p_r$  den Druckverlust durch Reibung ( $\text{kp/m}^2$ ),  $\gamma$  das Raumgewicht ( $\text{kg/m}^3$ ),  $x$  die Düsenlänge in Richtung der Rohrachse,  $\lambda$  den Rohrreibungsbeiwert und  $r$  den Radius des kreisförmigen Querschnittes (m) bedeutet], so wird die Form und Länge der Düse vom Expansionsverlauf abhängig oder umgekehrt. Der Expansionsverlauf [das heißt die Abhängigkeit des Druckes, der Temperatur  $T$  ( $^{\circ}\text{K}$ ), der Geschwindigkeit  $w$  ( $\text{m/sec.}$ ) usw. von der Rohrlänge  $x$ ] läßt sich daher für eine gegebene Düsenform ermitteln, wenn der Rohrreibungsbeiwert  $\lambda$  bzw. die Wandrauhigkeit gegeben ist. Letztere ist bekanntlich für das glatte Rohr nur von der Reynolds-Zahl für mittlere Rauhigkeit von  $Re$  und dem Rauheitsmaß, für große Rauhigkeit jedoch nur vom Rauheitsmaß abhängig. Der Einfachheit halber wird im folgenden mit gleichbleibender Rohrreibungszahl  $\lambda$  gerechnet.

Für den divergenten Teil der Laval-Düse wurde eine solche Rechnung bereits 1905 von Proell<sup>2</sup> durchgeführt, und zwar für eine lineare Abhängigkeit des Halbmessers  $r$  des Rohrquerschnittes von der Rohrlänge  $x$  (kegelige Düse). M. Ledinegg<sup>3</sup> legt eine logarithmische Abhängigkeit der Querschnittsfläche zugrunde. In beiden Fällen wird von jenem Querschnitt ausgegangen, in dem die Schallgeschwindigkeit herrscht (vom sog. tönenenden Querschnitt).

<sup>1</sup> Siehe z. B. R. Plank: Handbuch der Kältetechnik, II. Bd.: Thermodynamische Grundlagen, S. 346 und 353. Berlin: Springer-Verlag. 1953.

<sup>2</sup> R. Proell: Z. ges. Turbinenwes. 1904, 161; 1905, 151.

<sup>3</sup> M. Ledinegg: Strömung kompressibler Medien in Strömungsmaschinen. Maschinenbau u. Wärmewirtschaft H. 11 (1954).

In vorliegender Arbeit wird zunächst der besondere Fall der Düsenströmung mit polytropem Zustandsverlauf erörtert, und die zugehörige Düsenform ermittelt, die aber wegen des langen Verjüngungssteiles und schlechten Wirkungsgrades praktisch nicht brauchbar ist. Daher wird anschließend noch die für technische Zwecke allein in Frage kommende Düsenform mit kurzem Verjüngungs- und kegeligem Erweiterungs- teil behandelt.

## II. Allgemeine Beziehungen für die Düsenströmung mit Reibung.

Aus dem Impulssatz<sup>4</sup> folgt die Gleichung:

$$w dw + g v dp + \frac{w^2 \lambda dl}{4 r} = 0. \quad (2)$$

Aus der Kontinuitätsbedingung folgt:

$$p f w = p w r^2 \pi = G R T \quad (3)$$

[ $G$  sekundliches Durchflußgewicht ( $\text{kg/sec.}$ ),  $f$  Querschnittsfläche ( $\text{m}^2$ )]. Ferner ergibt sich durch Differenzieren von (3):

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dw}{w} - \frac{df}{f}. \quad (4)$$

Im folgenden wird die Gültigkeit des Gasgesetzes  $p v = R T$ , ferner konstante spezifische Wärme  $c_p$  bzw. konstantes  $\kappa = c_p/c_v$  vorausgesetzt. Unter diesen Voraussetzungen ist das  $i$ -Diagramm der Gase bekanntlich mit dem  $T s$ -Diagramm bis auf eine Maßstabverschiedenheit identisch.

Setzt man außerdem Wärmedichtheit der Wandungen, also adiabatische Strömung voraus, so ist nach der Strömungsgleichung:

$$\frac{A w dw}{g} = d \left( \frac{A w^2}{2 g} \right) = - di = - c_p dT \quad (5)$$

oder integriert

$$\frac{A w^2}{2 g c_p} = C_1 - T, \quad (6)$$

wobei

$$C_1 = \frac{A w_1^2}{2 g c_p} + T_1. \quad (6a)$$

Aus (3) und (6) ergibt sich eine Beziehung für den Druck  $p$ :

$$p = \frac{G R \left( C_1 - \frac{A w^2}{2 g c_p} \right)}{\pi r^2 w}. \quad (7)$$

Nachdem Gl. (6) auch für reibungsbehaftete Strömungen gilt, so ist die Temperatur die gleiche Funktion der Geschwindigkeit, ob nun Reibung vorhanden ist oder nicht. Trägt man  $T$  über  $w$  auf, so gilt die  $T$ -Kurve nach Gl. (6) für alle möglichen Reibungsverhältnisse (Abb. 1).

Da die Schallgeschwindigkeit bei Gasen bekanntlich nur von der Temperatur abhängt, letztere aber nach Gl. (6) eine eindeutige Funktion der Geschwindigkeit ist, so muß die Schallgeschwindigkeit stets bei derselben Geschwindigkeit auftreten, das heißt ihrer Größe nach unabhängig von den Reibungsverhältnissen sein. Aus Gl. (2) wird mit  $v = RT/p$  und  $dp/p$  nach Gl. (4):

$$\frac{dw}{w} + \frac{g R T}{w^2} \left[ \frac{dT}{T} - \frac{dw}{w} - \frac{df}{f} \right] + \frac{\lambda dx}{4 r} = 0. \quad (8)$$

<sup>4</sup> C. Kämmerer: Stationäre Gasströmung durch ein gerades Rohr mit und ohne Wärmedurchgang und Reibung. Österr. Ingenieur-Arch. 5, H. 4, 340 (1951).

Ersetzt man hierin  $T$  und  $dT/T$  nach Gl. (5) und (6), ferner  $df/f$  durch  $2 dr/r$ , so wird nach einigen Umformungen:

$$dw \left[ \frac{w}{\kappa} - \frac{g R}{w} \left( C_1 - \frac{A w^2}{2 g c_p} \right) \right] = dr \frac{2 g R}{r} \left( C_1 - \frac{A w^2}{2 g c_p} \right) - dx \frac{w^2 \lambda}{4 r} \quad (9)$$

oder

$$\frac{dw}{w} (w^2 c - b) + \frac{2 dr}{r} (h w^2 - b) = - \frac{w^2 \lambda dx}{4 r} = - g dq_r/A \quad (9a)$$

mit

$$\frac{\kappa+1}{2\kappa} = c, \quad \frac{\kappa-1}{2\kappa} = h, \quad g R T_1 = b.$$

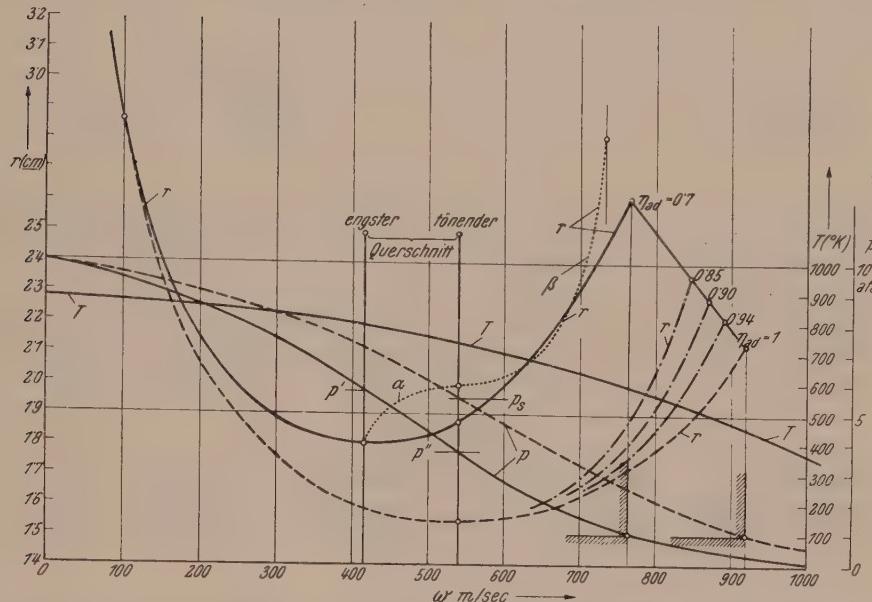


Abb. 1. Druck ( $p$ ), Temperatur  $T$  ( $^{\circ}$ K) und Halbmesser des Düsenquerschnittes  $r$  (cm) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $w$  (m/sec.). Voll ausgezogen = polytropischer Zustandsverlauf, strichiert = verlustlose Strömung, strichpunktiert = Reibung nur im Erweiterungsteil, punktiert = Düse mit zwei kegeligen Erweiterungen.

Die Differentialgleichung (9) gibt einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit  $w$ , dem Halbmesser  $r$  des kreisförmigen Düsenquerschnittes und der Düsenlänge  $x$ . Ist die Form der Düse also  $r = f(x)$  gegeben, so ergibt sich aus Gl. (9) durch Integration der Verlauf von  $x$  bzw.  $r$  über  $w$ , damit aber auch der Druck und Temperaturverlauf über  $x$ . Bezeichnet man den jeweiligen Erweiterungswinkel der Düse mit  $\alpha$ , so wird nach Gl. (9)

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - 4 \frac{r}{w} \left( \frac{dw}{dx} \right) \left[ \frac{b}{w^2} - c \right]}{8 \left[ \frac{b}{w^2} - h \right]} \quad (10)$$

oder mit Gl. (25)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda \left[ 1 + \frac{c_p}{c_n} (b/w^2 - c) \right]}{8 (b/w^2 - h)}, \quad (10a)$$

wenn mit  $c_n$  die spezifische Wärme längs der Zustandsänderung bezeichnet wird. Für den tönenden Querschnitt bzw. für die Schallgeschwindigkeit ist:  $w^2 = g \kappa R T_s$ :

$$\frac{g R T_1}{w_s^2} = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{w^2} = c, \quad \text{da} \quad \frac{T_s}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1}$$

ist. Somit wird der Ausdruck in der eckigen Klammer im Zähler gleich Null und jener im Nenner gleich  $1/\kappa$ , da  $c - h = 1/\kappa$  ist, daher wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda \kappa}{8} \quad \text{oder} \quad B = \frac{\lambda}{8 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\kappa}. \quad (10b)$$

Die Schallgeschwindigkeit kann also nur im Erweiterungsteil ( $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ) durchschritten werden und die charakteristische Größe  $B$  beträgt hierbei unabhängig von  $\eta_{\text{pol}}$  oder  $n$  für jede beliebige Düsenform  $1/\kappa$ , also für Luft 0.715, vorausgesetzt, daß  $dw/dx$  endlich bleibt, das heißt unstetiger Querschnittsverlauf ausgeschlossen wird. So z. B. kann  $w_s$  am Ende einer konvergenten Düse oder eines geraden Rohres auch bei  $\operatorname{tg} \alpha = 0$  oder  $\operatorname{tg} \alpha < 0$  auftreten.

### III. Die Düse mit polytropischem Zustandsverlauf.

Bei polytropischer Entspannung nach der Beziehung  $p v^n = kst$  ist der polytropische Wirkungsgrad nach der Beziehung<sup>5</sup>

$$\eta_{\text{pol}} = \frac{\kappa(n-1)}{n(\kappa-1)} \quad (11)$$

mit dem Exponenten  $n$ , der zwischen  $\kappa$  und 1 liegt, verbunden. Anderseits ergibt sich der adiabat-verlustlose Wirkungsgrad  $\eta_{\text{ad}}$  aus  $\eta_{\text{pol}}$ , wenn der Anfangs- und Enddruck  $p_1$  und  $p_2$  gegeben ist, aus der Beziehung

$$\eta_{\text{ad}} = \frac{1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \eta_{\text{pol}}}{1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}. \quad (12)$$

Bei verlustloser Entspannung tritt die Schallgeschwindigkeit bekanntlich im engsten Querschnitt der Düse beim sog. kritischen Druckverhältnis

$$\frac{p_s}{p_1} = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (13)$$

auf. Bei der reibungsbehafteten Düse ist das bekanntlich nicht mehr der Fall. Dort herrscht im engsten Querschnitt ( $f'$ ) ein höherer Druck  $p'$  ( $p' > p_s$ ) und das zugehörige Druckverhältnis ist:

$$\frac{p'}{p_1} = \left( \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (14)$$

während

$$\frac{T'}{T_1} = \frac{2}{n+1}$$

ist. Die Schallgeschwindigkeit

$$w_s'' = \sqrt{g \kappa R T_s''} \quad (15)$$

tritt hingegen bei einem kleineren Druckverhältnis

$$\left( \frac{p''}{p_1} < \frac{p_s}{p_1} \right)$$

auf, welches sich aus der Gleichsetzung:

$$w_s'' = \sqrt{\frac{2 g c_p T_1}{A} \left[ 1 - \left( \frac{p''}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]} = \sqrt{g \kappa R T_1 \left( \frac{p''}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}} \quad (16)$$

zu

$$\frac{p''}{p_1} = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (17)$$

<sup>5</sup> C. Kämmerer: Wirkungsgrade bei polytropischem Zustandsverlauf in Düsen und Strömungsmaschinen. Maschinenbau u. Wärmewirtschaft H. 5, 70 (1949).

ergibt, während  $T''/T_1 = 2/(\kappa + 1)$  ist. Da der Exponent  $n/(n - 1)$  größer als  $\kappa/(\kappa - 1)$  ist und  $2/(\kappa + 1) < 1$  ist, so wird  $p''$  auf alle Fälle kleiner als  $p_s$ , das heißt bei der reibungsbehafteten Düse, stetiger Querschnittsverlauf vorausgesetzt, tritt die Schallgeschwindigkeit nicht im engsten Querschnitt, sondern erst nach Durchschreitung desselben, also bereits im erweiterten Teil der Düse auf.

Durch den Einfluß der Reibung wird also gegenüber dem reibungslosen Fall der engste Querschnitt zu einem höheren Druckverhältnis und der tönende Querschnitt ( $f''$ ) zu einem niedrigeren Druckverhältnis hin verschoben. Die mit ('') und mit ('') bezeichneten Querschnitte wandern also in entgegengesetzte Richtungen. Die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt  $w'$  beträgt für die reibungsbehaftete Düse nach Gl. (6):

$$w' = \sqrt{\frac{2 g c_p T_1}{A} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)} \quad (18)$$

und die Schallgeschwindigkeit:

$$w'' = \sqrt{\frac{2 g c_p T_1}{A} \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)}. \quad (19)$$

Ersetzt man hierin  $c_p/A$  durch  $R \kappa/(\kappa - 1)$ , ferner  $T_1$  durch  $T_s \cdot \frac{\kappa+1}{2}$ , so wird:

$$w'' = \sqrt{g \kappa R T_s},$$

das heißt die Schallgeschwindigkeit ist für die reibungslose und reibungsbehaftete Düse von gleicher Größe, wie bereits aus Abschnitt II hervorging. Die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt ( $w'$ ) ist natürlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit  $w_s$ , und zwar ist das Verhältnis nach Gl. (18) und (19):

$$\frac{w'}{w_s} = \sqrt{\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)} \frac{(n-1)}{(n+1)}}. \quad (20)$$

Für die polytropische Düsenströmung ist der sog. polytropische Wirkungsgrad:

$$\eta_{\text{pol}} = \frac{A L_{\text{eff}}}{A L_{\text{eff}} + q_r} = \frac{d \left( \frac{A w^2}{2 g} \right)}{d \left( \frac{A w^2}{2 g} \right) + d q_r} \quad (21)$$

[ $L_{\text{eff}}$  wirklich geleistete Arbeit (kpm),  $q_r$  Reibungswärme (kcal)] eine für den ganzen Zustandsverlauf konstante Größe<sup>5</sup>. Nach Gl. (1) ist:

$$dq_r = \frac{A p_r}{\gamma} = \frac{w^2 \lambda dx}{4 r g} A. \quad (22)$$

Dieser Ausdruck, in Gl. (21) eingesetzt, ergibt die Beziehung:

$$\left( \frac{1}{\eta_{\text{pol}}} - 1 \right) \frac{d(w^2)}{w^2} = \frac{\lambda dx}{2 r} = \left( \frac{1}{\eta_{\text{pol}}} - 1 \right) \frac{2 dw}{w}. \quad (23)$$

Nach Gl. (11) ist:

$$\left( \frac{1}{\eta_{\text{pol}}} - 1 \right) = \frac{\kappa - n}{\kappa(n-1)}.$$

Ferner ist bekanntlich:

$$c_n = c_v \frac{(n-\kappa)}{(n-1)},$$

so daß auch geschrieben werden kann:

$$k_1 = \frac{2}{\lambda} \left( - \frac{c_n}{c_p} \right) = - \frac{2 c_n}{\lambda c_p}.$$

Mit der Substitution

$$\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\eta_{\text{pol}}} - 1 \right) = k_1 \quad (24)$$

erhält man schließlich die einfache, allgemein gültige Gleichung:

$$2 k_1 \left( \frac{dw}{w} \right) = \frac{dx}{r} \quad \text{oder} \quad - \frac{4 c_n}{\lambda c_p} \left( \frac{dw}{w} \right) = \frac{dx}{r} \quad (25)$$

in welcher  $k_1$  bzw.  $c_n$  für die Polytrope eine Konstante ist. Gl. (25) verknüpft die Geschwindigkeit  $w$  mit der Düsenlänge  $x$  und dem Halbmesser  $r$ . Anderseits lässt sich  $r$  nach Gl. (3) auch schreiben:

$$r = \sqrt{\frac{G R T}{\pi w p}}. \quad (3a)$$

Da für die Polytrope

$$(p v^n = p_1 v_1^n) \dots v = v_1 \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{n}},$$

so wird mit  $T/p = v/R$

$$r = \sqrt{\frac{G v}{\pi w}} = \sqrt{\frac{G v_1 \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{n}}}{\pi w}}. \quad (26)$$

Nun ist für polytropische Expansion die Geschwindigkeit:

$$w = \sqrt{\frac{2 g c_p T_1}{A} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]} \quad (27)$$

oder

$$\frac{p}{p_1} = \left( 1 - \frac{A w^2}{2 g c_p T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (27a)$$

Dies in Gl. (26) eingesetzt, liefert:

$$r^2 = \frac{G v_1}{\pi w \left( 1 - \frac{A w^2}{2 g c_p T_1} \right)^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (28)$$

Diese Gleichung gestattet, den Halbmesser des Düsenquerschnittes in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit zu berechnen.

Setzt man  $r$  aus (28) in (25) ein, so erhält man schließlich folgende nur  $w$  und  $x$  enthaltende Differentialgleichung:

$$2 k_1 \sqrt{\frac{G v_1}{\pi}} \frac{dw}{w^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{A w^2}{2 g c_p T_1} \right)^{\frac{1}{2(n-1)}}} = dx, \quad (29)$$

die sich aber in geschlossener Form nicht integrieren lässt. Den kleinsten Halbmesser  $r$  des Düsenquerschnittes erhält man durch Einsetzen von  $w'$  aus Gl. (18) in Gl. (28) zu:

$$r_{\min}^2 = \left( \frac{G v_1}{\pi \sqrt{\frac{2 g c_p T_1}{A}}} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{n+1} \left( \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}}}}. \quad (28a)$$

Der veränderliche Erweiterungswinkel der Düse mit polytropischem Zustandsverlauf beträgt nach Gl. (10a), (25) und (24)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - \frac{2}{k_1} (b/w^2 - c)}{8 (b/w^2 - h)}. \quad (30)$$

Beispiel: Es ist eine polytrope Düse für Luft von 10 ata Anfangsdruck, 1 ata Gegendruck  $t_1 = 600^\circ C$  und  $\eta_{ad} = 0.7$  zu ermitteln.  $\lambda$  wird als konstant mit 0.04 angenommen. Dann wird:

$$\eta_{pol} = 0.623, \quad k_1 = 30.25 \quad \text{und} \quad n = 1.216.$$

Mit  $R = 29 \cdot 27$  wird  $v_1 = 0 \cdot 2555 \text{ m}^3/\text{kg}$ .  $r$  lässt sich nach Gl. (28),  $T$  nach Gl. (6) und  $p$  nach (3) als Funktion von  $w$  ermitteln (Abb. 1) und Tabelle 1. (Zum Vergleich sind in Abb. 1 auch die betreffenden Werte für die reibungslose Düse eingezeichnet.) Um die Rohrlänge  $x$  zu erhalten, kann man Gl. (25) benützen und schrittweise für  $\Delta w$  z. B. = 20 oder 10 (m/sec.) das zugehörige  $\Delta x$  ermitteln, da der zu jeder Geschwindigkeit  $w$  gehörige Radius  $r$  bereits bekannt ist\*. So ergibt sich  $r$  als Funktion von  $x$ , das heißt die gesuchte Form der polytropen Düse (Abb. 2). Für kleine Werte von  $w$  (etwa  $w < 40 \text{ m/sec.}$ ) ist nun  $\lambda$  z. B. (= 0.04) gegen den Klammerausdruck im Zähler der Gl. (30) zu vernachlässigen. Man erhält dann, weil die Ausdrücke  $c$  und  $h$  ebenfalls zu vernachlässigen sind, näherungsweise:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{4 k_1}$$

als konstant. Der Verjüngungsteil der polytropischen Düse nimmt daher für kleine Geschwindigkeiten die Form eines geraden Kegels an (also gerade umgekehrt wie bei der normalen Düse). Zählt man die Düsenlänge  $x$  vom engsten Querschnitt, also von

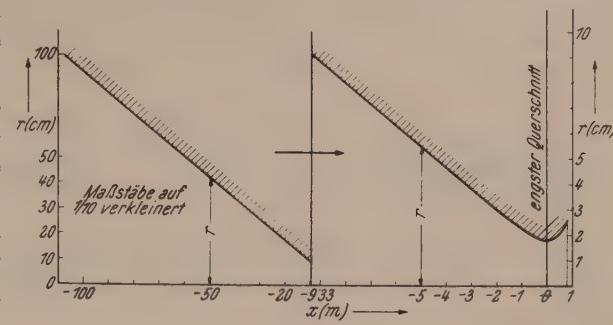


Abb. 2a. Düse mit polytropischem Zustandsverlauf und 70% Wirkungsgrad ( $t_1 = 600^\circ \text{C}$ ,  $p_1 = 10 \text{ ata}$ ,  $p_2 = 1 \text{ ata}$ ).

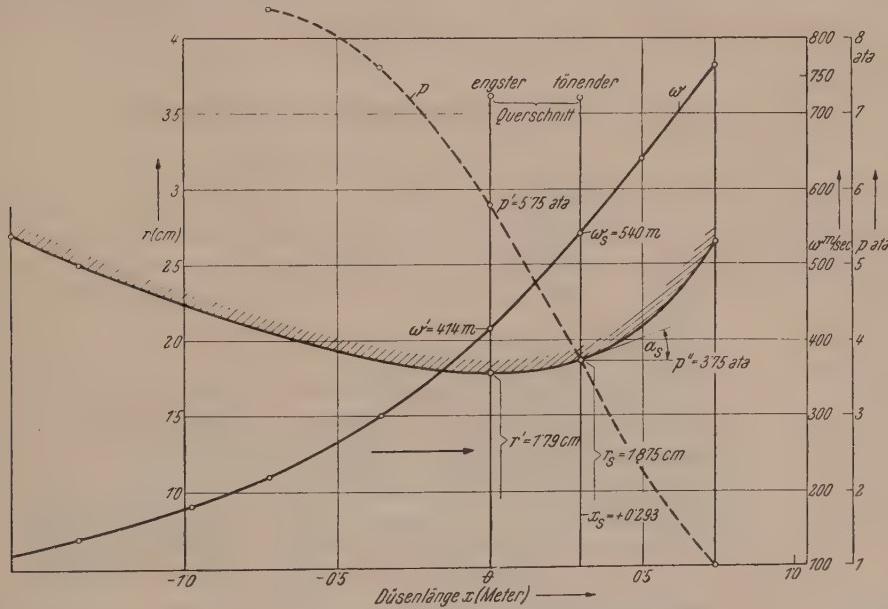


Abb. 2b. Druck- und Geschwindigkeitsverlauf für die polytropische Düse Abb. 2a über der Düsenlänge  $x$ .

$w = 414 \text{ m/sec.}$  aus, so ergeben sich die  $x$ -Werte nach Tabelle 1. Bei weiterer Verkleinerung von  $w$  unter  $0 \cdot 1 \text{ m/sec.}$  bewegt sich sowohl  $r$  als auch  $x$  gegen  $\infty$ . Der

\* Genauer ist der Verlauf von  $w$  über  $x$  durch Reihenentwicklung aus Gl. (29) zu erhalten. Für das vorliegende Beispiel wurde diese Entwicklung von Dipl.-Ing. Mayr-Harting durchgeführt, wofür ihm an dieser Stelle gedankt sei.

konvergente Teil wird länger als der Erweiterungsteil, letzterer konvex nach innen. Bei einer solchen Düse tritt bereits im Verjüngungsteil ein erheblicher Reibungsverlust auf.

Tabelle 1.

	$p$ (ata)	$T$ ( $^{\circ}$ K)	$w$ (m/sec)	$r$ (cm)	$x$ (m)
Behälter . . . . .	10	873	0	$\infty$	$-\infty$
	10	873	0·1	90·25	— 107·47
	10	873	1·0	28·50	— 32·89
	10	873	10	9·10	— 9·33
Engster Querschnitt . . . . .	5·75	788	414	1·79	$\pm 0$
Tönender Querschnitt . . . . .	3·75	730	540	1·875	+ 0·293
Endquerschnitt . . . . .	1·00	450	765	2·145	+ 0·747

Das adiabat-verlustlose Wärmegefälle beträgt  $(873 - 450) \cdot 0\cdot24$  kcal/kg, die Temperatur beim engsten Querschnitt  $790^{\circ}$ K, daher ist der Verlust bis zum engsten Querschnitt  $(873 - 790)/(873 - 450) = 83/423 = 19\cdot6\%$  oder  $19\cdot6/0\cdot3 = 65\cdot5\%$  des Gesamtverlustes, also unnötig groß. Auch die konvexe Form des Erweiterungsteiles ist ungünstig, weil der günstigste noch zulässige Erweiterungswinkel von zirka  $4^{\circ}$  nur an einer Stelle, nämlich am Düsenende angewendet werden könnte.

Für praktische Zwecke kommt bekanntlich gerade umgekehrt nur ein kurzer Verjüngungsteil und ein Erweiterungsteil in Frage, der an allen Stellen den günstigsten, das heißt größtmöglichen Erweiterungswinkel  $\alpha$  aufweist. Da dieser Winkel geschwindigkeitsunabhängig ist, ergibt der gerade Kegel den besten Wirkungsgrad bzw. die beste Düsenform. Würde bei kleinen Überschallgeschwindigkeiten ein größerer Erweiterungswinkel als etwa  $4^{\circ}$  zulässig sein, dann wäre etwa eine nach innen konkave Form zu bevorzugen.

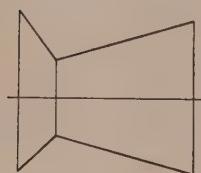


Abb. 3.  
Düse mit unstetigem  
Querschnittsverlauf.

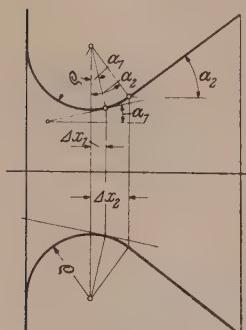


Abb. 4.  
Düse mit kegeligem  
Erweiterungsteil und  
stetigem  
Querschnittsverlauf.

#### IV. Die kegelig erweiterte Düse.

##### 1. Der Übergangsteil.

Die Schallgeschwindigkeit tritt nach Gl. (10a) immer dort auf, wo die Größe  $B = \lambda/8 \operatorname{tg} \alpha$  von einem Wert unter  $1/\kappa$  ( $= 0\cdot715$  für Luft) in einen solchen über  $1/\kappa$  entweder stetig oder unstetig übergeht. Für konstantes  $\lambda$  muß dabei der Tangens des Erweiterungswinkels den Wert  $\lambda/8 B$  überschreiten. Dieser sog. tönende Querschnitt kann bei unstetigem Übergang, wenn also die Kontur der Düse einen Bruchpunkt aufweist, auch mit dem engsten Querschnitt zusammenfallen (z. B. Abb. 3). Bei stetigem Verlauf der Düsenbegrenzung muß er jedoch in einem gewissen Abstand  $\Delta x_1$  nach dem engsten Querschnitt liegen, wobei es auf den Ausrundungsradius des Übergangsteiles ankommt. Eine Ausrundung ist schon deshalb erforderlich, damit die Strömung sich von der Wand nicht ablöst. Ist z. B. beim kleinsten Durchmesser der Ausrundungsradius  $\varrho$  (Abb. 4), so beträgt der Abstand des tönenden vom engsten Querschnitt:

$$\Delta x_1 = \varrho \sin \alpha_1$$

und mit  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \lambda/8 B = \lambda \kappa/8$

$$\Delta x_1 = \varrho \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\lambda \kappa/8) \doteq \varrho \lambda \kappa/8.$$

So ist z. B.  $\Delta x_1$  für eine Düse mit 3 cm engstem Durchmesser,  $\varrho = 1$  cm,  $\kappa = 1\cdot4$ ,  $\lambda = 0\cdot04$ ,  $\Delta x_1 = 0\cdot007$  cm =  $0\cdot07$  mm =  $70 \mu$  (70 Mikron).

Der Abstand des tönenden vom engsten Querschnitt ist demnach so gering, daß er für praktische Rechnungen außer Betracht bleiben kann.

Der geradkegelige Teil der Düse beginnt erst im Abstand

$$\Delta x_2 = \varrho \sin \alpha_2$$

vom engsten Querschnitt, also z. B. für  $\alpha_2 = 4^\circ$  ( $\operatorname{tg} \alpha = 0.07$ ) und  $\varrho = 1 \text{ cm}$  im Abstand von 0.697 mm.

## 2. Der kegelige Erweiterungsteil.

Die allgemein gültige Gl. (9) läßt sich mit  $dx = dr/\operatorname{tg} \alpha$  auch in folgender Form schreiben:

$$-\frac{2 dr}{r} = \frac{dw}{w} \frac{\left[ w^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{A R}{2 c_p} \right) - g R T_1 \right]}{\left[ w^2 \left( \frac{\lambda}{8 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{A R}{2 c_p} \right) - g R T_1 \right]}, \quad (31)$$

wobei  $\operatorname{tg} \alpha$  nun als konstant betrachtet wird.

Führt man der Einfachheit halber folgende Substitutionen ein,

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{A R}{2 c_p} = \frac{\varkappa + 1}{2 \varkappa} = c,$$

$$\frac{\lambda}{8 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{A R}{2 c_p} = B + \frac{\varkappa - 1}{2 \varkappa} = a$$

und

$$g R C_1 = g R T_1 = b,$$

so wird:

$$-\frac{2 dr}{r} = \frac{dw}{w} \left[ \frac{w^2 c - b}{w^2 a - b} \right] = \frac{dw}{w} \left[ \frac{w^2 - b/a}{w^2 - b/a} \right] \frac{c}{a}. \quad (31a)$$

Integriert, ergibt Gl. (31) nach einigen Umformungen:

$$r^2 = \frac{C_2}{w \sqrt{\alpha}} (a w^2 - b)^{\frac{\alpha - c}{2 a}} \quad (33 \alpha)$$

oder

$$r^2 = \frac{C_3}{w \sqrt{a} (b - a w^2)^{\frac{c - a}{2 a}}}, \quad (33 \beta)$$

wobei, wie leicht einzusehen ist, Fall  $\alpha$  für Unterschall ( $w^2 > b/a$  und  $a > c$ ), hingegen Fall  $\beta$  ( $w^2 < b/a$  und  $a < c$ ) für Überschall gilt. Für die Schallgeschwindigkeit ist nach Früherem  $w_s^2 = b/c$ . Damit nun  $r$  mit  $w$  zunimmt ( $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ), müssen Zähler und Nenner der rechten Seite von Gl. (31a) ungleiche Vorzeichen haben. Daher muß gelten:

entweder  $b/a < w^2 < b/c$  Fall  $\alpha$ , Unterschall,

oder  $b/a > w^2 > b/c$  Fall  $\beta$ , Überschall.

Im ersten Falle tritt die Schallgeschwindigkeit  $w_s$  am Ende der kegeligen Erweiterung, im zweiten Falle ( $\beta$ ) am Beginn derselben auf. Aus Gl. (31a) geht ferner hervor, daß die Funktion  $r^2 = f(w)$  für  $w^2 = b/c$ , das heißt für die Schallgeschwindigkeit ein Maximum oder Minimum aufweist (waagrechte Tangente der Kurve  $r$  über  $w$  in den Fällen  $\alpha$  und  $\beta$ ).

Man könnte z. B. an den engsten Querschnitt der polytropischen Düse, also bei Unterschall, einen Kegel bis zur Erreichung von  $w_s$  (Fall  $\alpha$ ) und beim tönenden Querschnitt, also bei  $w_s$ , einen zweiten Kegel mit größerem Erweiterungswinkel (Fall  $\beta$ ) ansetzen, um auf Überschallgeschwindigkeiten zu kommen. Siehe Abb. 5 und die punktierte Kurve in Abb. 1.

Für den ersten Kegel muß nach Früherem  $b/a < w_1^2$  bzw.  $a > b/w_1^2$  im Beispiel also größer als  $250500/171500 = 1.46$  sein, damit  $a w^2 - b$  eine positive Größe ist.  $a$  könnte auch beliebig groß gewählt werden. Z. B.  $\infty$  ( $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , gerades Rohr, s. Fußnote 1). Wählt man z. B.  $a = 1.643$ , so wird  $B = a - \frac{\kappa-1}{2\kappa} = 1.5$  und  $\operatorname{tg} \alpha = \lambda/8 B = 0.04/12 = 0.003$ , das heißt 3.33 mm pro m. Ferner wird  $b = 9.81 \cdot 29.27 \cdot 873 = 250500$ ,  $c = (\kappa + 1)/2\kappa = 0.857$ ,  $(a - c)/2a = 0.786/3.286 = 0.239$  und die Konstante  $C_2 = 143.5 \cdot 10^{-4}$ .

Damit wird für

$$\begin{aligned} w_1 &= 414 \text{ m/sec.} & r_1 &= 1.79 \text{ cm} & p &= 5.55 \text{ ata} \\ w &= 500 \quad , & r &= 1.98 \quad , & p &= 3.56 \quad , \\ w_s &= 540 \quad , & r_s &= 1.99 \quad , \text{ und } p_s &= 3.19 \quad , \end{aligned}$$

Die Länge des ersten Kegels beträgt 60.1 cm.

Eine höhere Geschwindigkeit als  $w_s$  ist mit diesem ersten Konus nicht erzielbar.

Für den zweiten Kegel (Fall  $\beta$ ) muß nach Früherem  $b/a > w_s^2$  bzw.  $a < b/w_s^2$  gewählt werden.

Wegen  $w_s^2 = b/c$  muß also  $a < c$  oder  $B < 1/\kappa$  (z. B. für Luft  $< 0.714$ ) sein. Die mit einem bestimmten Wert  $a$  erreichbare Höchstgeschwindigkeit ist  $w_{\max}^2 = b/a$ , da sonst der Klammerausdruck in Gl. (35) negativ wird. Setzt man z. B.  $w_{\max}^2$  für das vorliegende Beispiel mit 750 m/sec. fest, so wird  $a = b/w_{\max}^2 = 250500/562000 = 0.446$ ,  $B = a - 0.143 = 0.303$ ,  $c - a = 0.857 - 0.446 = 0.411$  und  $(c - a)/2a = 0.461$ .

Würde man  $w_{\max}^2 = w_s^2$  wählen (keine Geschwindigkeitssteigerung), so wäre  $a = c$  bzw.  $B = 1/\kappa$  und der Exponent aber auch der Klammerausdruck in Gl. (33) wird Null. Beispiel: Mit  $w_1 = w_s = 540$  m/sec. und  $r_s = 1.99$  cm wird die Konstante  $C_3 = 577.540 \cdot 10^{-4}$ .

Damit ergeben sich folgende Halbmesser und Drücke:

$$\begin{aligned} \text{Für } w = w_s = 540 \text{ m/sec.} & \quad r = 1.99 \text{ cm} & p &= 3.19 \text{ ata} \\ w = 600 \quad , & \quad r = 2.02 \quad , & p &= 2.66 \quad , \\ w = 700 \quad , & \quad r = 2.38 \quad , & p &= 1.527 \quad , \\ w = 730 \quad , & \quad r = 2.82 \quad , & p &= 0.987 \quad , \end{aligned}$$

Die Länge des zweiten Kegels beträgt 50.3 cm.

3. Ein Sonderfall ist jener, wo  $a = c$  bzw.  $B = \lambda/8 \operatorname{tg} \alpha = 1/\kappa$  gewählt wird. Dann geht (33  $\alpha$ ) oder (33  $\beta$ ) (den Fall  $w = w_s$  ausgenommen) über in:

$$r^2 = \frac{C_4}{w \sqrt{a}}$$

oder

$$\left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) = \left( \frac{w_2}{w_1} \right) \quad \text{bzw.} \quad r^2 w = G \cdot v \cdot / \pi = \text{konstant.} \quad (34)$$

Da  $\operatorname{tg} \alpha$  positiv sein muß, gilt Gl. (34) nur für den Erweiterungsteil. Für den Erweiterungswinkel  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{8}$  nimmt die Geschwindigkeit nach Gl. (34) mit zunehmendem  $r$  wieder ab. Man gelangt sonach von der Schallgeschwindigkeit auf Unterschall. Wegen  $r_1^2 w_1 = r_2^2 w_2 = G v / \pi$  ist für diesen Sonderfall nach Gl. (34) das spezifische Volumen  $v$  bzw. das Produkt  $r^2 w$  konstant. Nachdem aber  $w$  in Strömungsrichtung abnimmt, muß nach Gl. (7) der Druck ( $p$ ) zunehmen. Es handelt sich daher um einen Unterschalldiffusor bei konstantem Volumen, beginnend bei  $w_s$ . Nach Gl. (7) ist:

$$p = \frac{G}{g} \frac{(b - h w^2)}{\pi r^2 w}, \quad (34a)$$

wobei  $r^2 w$  als konstant zu betrachten ist.

Um auf Überschall zu kommen, muß offenbar  $\alpha$  größer als vorhin bzw.  $B < 1/\alpha$  gewählt werden, wie bereits für den zweiten Kegel des vorhergehenden Beispieles angeführt wurde.  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{8}$  bildet die untere Grenze des Erweiterungswinkels, bei welchem eine Geschwindigkeitserhöhung möglich ist. Bei dieser unteren Grenze, also bei  $B = 1/\alpha = 0.857$  ist, ausgehend von  $w_s$ , keine Geschwindigkeitserhöhung mehr möglich. Die Schallgeschwindigkeit bleibt bei sinkendem Druck längs des ganzen Kegels erhalten (Gl. (34) gilt für diesen Fall nicht, da  $\frac{r_1^2 w_1}{r_2^2 w_2} = \left(\frac{0}{0}\right)^0$ , das heißt unbestimmt wird). Es ergibt sich also eine isotherme Entspannung bei gleichbleibender Geschwindigkeit und Temperatur (vollständige Drosselung), worauf bereits Ledinegg<sup>3</sup> verwiesen hat. Hierbei ist der Druck  $p$  wegen Gl. (3) umgekehrt verhältnisgleich,  $r^2$  bzw. das Produkt  $p \cdot r^2 = \text{konstant}$ .

Ausgehend von der Schallgeschwindigkeit sind also für eine kegelige Erweiterung mit  $B = 1/\alpha$  zwei Möglichkeiten vorhanden, und zwar, wenn der Gegendruck höher ist, Drucksteigerung und Geschwindigkeitsabnahme, wenn der Gegendruck kleiner ist, isotherme Expansion bei konstanter Geschwindigkeit und Druckabnahme.

#### 4. Druckverlauf bei veränderlichem Erweiterungswinkel.

Nach Gl. (7) und (33) wird für Unterschall (Fall  $\alpha$ )

$$p = \frac{G \sqrt{a} (b - h w^2)}{\pi g C_2 (a w^2 - b)^{\frac{a-c}{2a}}} \quad (34b)$$

und für Überschall (Fall  $\beta$ ):

$$p = \frac{G \sqrt{a} (b - h w^2) (b - a w^2)^{\frac{c-a}{2a}}}{\pi g C_3}. \quad (34c)$$

Führt man Verhältniswerte ein, so ist für Fall  $\alpha$  bzw. nach Gl. (34b)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(b - h w_1^2)}{(b - h w_2^2)} \left( \frac{a w_2^2 - b}{a w_1^2 - b} \right)^{\frac{a-c}{2a}} \quad (34b')$$

und für Fall  $\beta$  bzw. nach Gl. (34c):

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{b - h w_1^2}{b - h w_2^2} \right) \left( \frac{b - a w_1^2}{b - a w_2^2} \right)^{\frac{c-a}{2a}}. \quad (34c')$$

Nach diesen Gleichungen läßt sich das Verhalten des Druckes berechnen, wenn man

z. B. von der Schallgeschwindigkeit  $w_s$  bei  $p_s$  und  $T_s$  ausgeht. So erhält man beispielsweise für den unter IV, 2 am Schluß angeführten Ausgangspunkt:

$$w_s = 540 \text{ m/sec.}, \quad p_s = 3 \cdot 19 \text{ ata}, \quad r_s = 1 \cdot 99 \text{ cm},$$

verschiedene Kurven, je nachdem  $\tan \alpha$  bzw.  $B = \lambda/8 \tan \alpha$  gewählt wird (Abb. 7). Gezeichnet sind die Fälle  $B = 1/\alpha$  (schon unter IV, 3 behandelt), ferner  $B = 0 \cdot 303$ ,  $B = 0$  ( $\lambda = 0$  oder  $\tan \alpha = \infty$ ),  $B = -0 \cdot 786$ ,  $B = -1$  und  $B = -1000$  (das heißt  $\tan \alpha$  nahezu Null, also dem geraden Rohr entsprechend) (bereits im Aufsatz<sup>4</sup> ausführ-

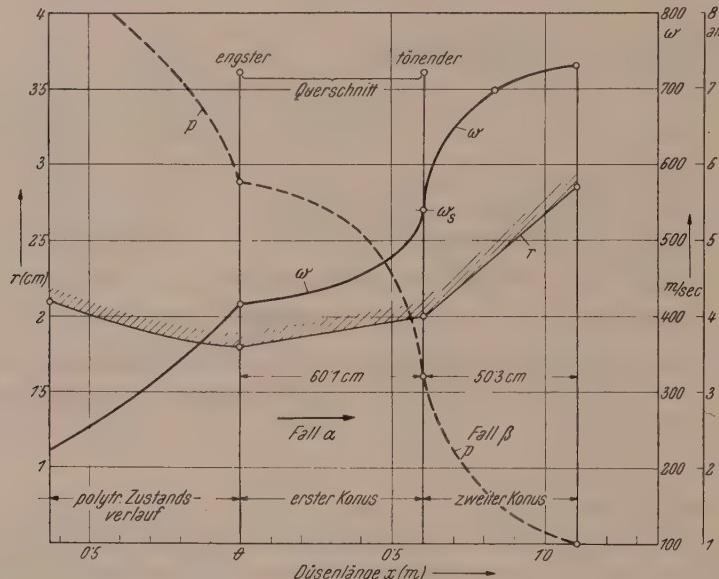


Abb. 5. Düse mit polytropem Verjüngungs- und doppelkegeligem Erweiterungsteil.

lich behandelt). Schließlich ist noch der Fall  $B = +1 \cdot 5$  eingezeichnet (unter IV, 2 behandelt bzw. auch in Abb. 5 gezeigt). Der mögliche Durchlaufungssinn ist jeweils durch Pfeile angegeben. Rechts oben und links unten sind keine Verläufe möglich bzw. befinden sich nicht durchschreitbare Gebiete. Die Bereiche der konvergenten Kegel sind durch Schraffur gekennzeichnet. Die Kurve  $B = 0$  entspricht der reibungsfreien Strömung, für welche bekanntlich

$$\frac{p_1}{p_2} = (T_1/T_2)^{3 \cdot 5} = \left( \frac{b - h w_1^2}{b - h w_2^2} \right)^{3 \cdot 5}$$

ist. Die Kurve  $B = \pm \infty$  entspricht wegen  $\tan \alpha = 0$  dem geraden Rohr gleichen Durchmessers.

5. Für praktische Zwecke kommt nur eine Düse mit kurzem Verjüngungsteil, abgerundetem Übergangsteil und kegiger Erweiterung nach Fall  $\beta$  in Frage. Im Gegensatz zur polytropen Düse ist der Verlust bis  $w_s$  sehr gering. Der Hauptverlust tritt hier im kegigen Erweiterungsteil auf, weil dessen Erweiterungswinkel wegen der Ablösungsgefahr nicht größer als etwa  $4^\circ$  ( $\tan \alpha = 0 \cdot 07$ ) gewählt werden darf. Praktisch kann man daher den konvergenten Teil der Düse als verlustlos annehmen und die Rechnung auf den kegigen Erweiterungsteil beschränken. Dann fällt auch der tönende mit dem engsten Querschnitt zusammen.

Legt man wieder eine Anfangstemperatur von  $600^\circ\text{C}$ , 10 ata im Behälter, 1 ata Gegendruck und, wie üblich, einen adiabaten Wirkungsgrad von 94% zu grunde, so wird  $w_2 = 892 \text{ m/sec.}$ ,  $T_2 = 475.5^\circ\text{K}$ ,  $v_2 = 1.39 \text{ m}^3/\text{kg}$  und  $r_2 = 2.226 \text{ cm}$ .

Es entsteht nun die Frage, wie groß der Reibungsbeiwert  $\lambda$  sein darf, damit sich der vorhin angenommene Wirkungsgrad von 94% beim ausführbaren Höchstwert von  $\tan \alpha (= 0.07)$  ergibt.

Nach Gl. (33 β) ist für kegelige Erweiterung im Überschallgebiet:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{w_2}{w_1} \left( \frac{b - a w_2^2}{b - a w_1^2} \right)^{\frac{c-a}{2a}} \quad (35)$$

oder

$$\log \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{w_1}{w_2} \right) = \frac{c-a}{2a} [\log (b - a w_2^2) - \log (b - a w_1^2)]. \quad (35a)$$

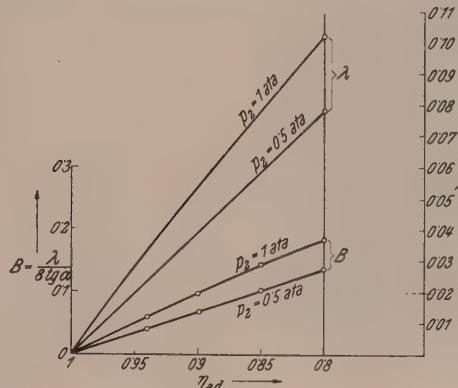


Abb. 6.  $B = \lambda/8 \tan \alpha$  bzw.  $\lambda$  in Abhängigkeit vom adiabaten Wirkungsgrad  $\eta_{ad}$  für Luft,  $t_1 = 600^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 10 \text{ ata}$  und  $\tan \alpha = 0.07$  ( $\alpha = 4^\circ$ ).

Mit  $c = 0.857$ ,  $b = 250500$  lässt sich  $a$  berechnen, wenn beachtet wird, daß  $a < b/w_2^2$  sein muß. Durch wiederholtes Probieren findet man  $a = 0.2027$  und kann sonach den Halbmesser  $r$  auch für Zwischenwerte von  $w$  bestimmen. Auf die gleiche Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{für } \eta_{ad} = 0.94 &\dots a = 0.2027, \quad B = 0.0597, \\ &= 0.90 \dots a = 0.2400, \quad B = 0.097, \\ &= 0.85 \dots a = 0.2850, \quad B = 0.142, \\ &= 0.80 \dots a = 0.3250, \quad B = 0.182, \end{aligned}$$

da  $B = a - 0.143$  ist.

Für ein anderes Druckverhältnis  $p_2/p_1$  ergeben sich andere Werte von  $B$ , die für  $p_2 = 0.5 \text{ ata}$  in Abb. 6 ebenfalls eingezeichnet sind. Für andere Anfangstemperaturen als  $600^\circ\text{C}$  müssen die  $a$ -Werte neu bestimmt werden. Man entnimmt aus Abb. 6, daß z. B. für  $\eta_{ad} = 0.94$  und  $\tan \alpha = 0.07$

$$\lambda = 8 \tan \alpha \cdot B, \text{ also } 8 \cdot 0.07 \cdot 0.0597 = 0.0334$$

beträgt. Ist  $\lambda$  kleiner, z. B. 0.0116 für die glatte Düse, so sind noch höhere Wirkungsgrade erzielbar. Bei Gegendrücken größer als 1 ata bzw. bei Druckverhältnissen

$p_2/p_1 > 0.1$  muß der Reibungseinfluß auch des konvergenten Teiles berücksichtigt werden.

### V. Die kegelig verengte Düse ( $B < 0$ ).

Liegt der Vorgang im Unterschallgebiet, so gilt Gl. (33  $\alpha$ ). Wird der Anfangsradius mit  $r_1$  und der Endradius mit  $r_2$  bezeichnet, so besteht nach Gl. (33  $\alpha$ ) die Beziehung:

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right) \left\{ \frac{(b - aw_2^2)}{(b - aw_1^2)} \right\}^{\frac{a-c}{2a}}, \quad (36)$$

wobei nun  $\tan \alpha$  als negative Größe einzusetzen ist. Die Größe  $B = \lambda/8 \tan \alpha$  wird dann auf alle Fälle negativ, die Größe  $a$  aber wegen  $a = B + h$  nur dann, wenn  $B > h$  ist.

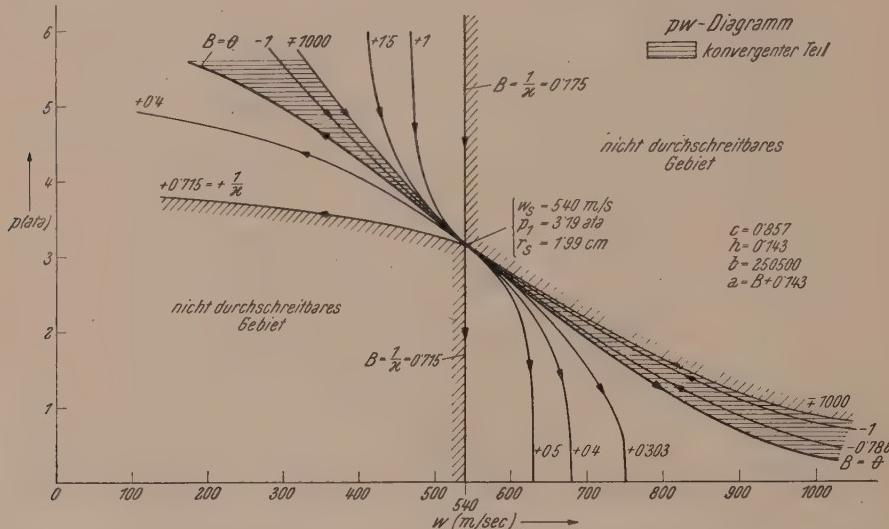


Abb. 7. Druckverlauf über der Geschwindigkeit ( $p w$ -Diagramm) für die kegelig erweiterte oder verengte Düse.

Ist z. B.  $r_1 = 0.9025$  m,  $w_1 = 0.1$  m/sec.,  $p_1 = 10$  ata (wie im Beispiel für die polytropen Düse), ebenso  $\tan \alpha = 0.00825$ ,  $\lambda = 0.04$ , so wird  $B = -0.606$ ,  $h = 0.143$ , somit  $a = -0.462$  und  $(a - c)/2a = +1.425$ .

Nach Gl. (36) wird dann

$$\text{für } w_2 = 300 \text{ m/sec.} \dots \dots \dots r_2 = 1.87 \text{ cm}$$

$$w_2 = 350 \text{ ,} \dots \dots \dots r_2 = 1.785 \text{ ,}$$

$$w_2 = 400 \text{ ,} \dots \dots \dots r_2 = 1.715 \text{ ,}$$

$$w_s = 540 \text{ ,} \dots \dots \dots r_2 = 1.675 \text{ ,} \mid p_s = 4.485 \text{ ata}$$

Bei einer solchen Düse wird  $w_s$  schon bei einem wesentlich höheren Druck erreicht als bei der polytropen Düse, was sich daraus erklärt, daß die kegelig verengte Düse um zirka 1.2 m kürzer ist als die polytropen (bis  $w_s$  gerechnet), somit einen kleineren Druckabfall aufweist.

(Eingegangen am 30. September 1954.)

## H. Mache gestorben.

Hofrat Prof. Dr. Heinrich Mache, langjähriges Mitglied des Professoren-Kollegiums der Technischen Hochschule Wien und Mitglied der Akademie der Wissenschaften, starb am 2. September 1954 im Alter von 78 Jahren.

Mache studierte bei Männern wie Boltzmann, F. Exner und Mach, promovierte 1898, habilitierte sich 1901 für Physik an der Universität Wien, 1906 wurde er außerordentlicher Professor an der Universität Innsbruck, 1908 an der Universität Wien und schließlich 1911 ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule Wien, wo er bis 1947 wirkte. Er war mehrmals Dekan und 1925/26 Rektor.

Mache war als Physiker weit über die Grenzen Österreichs hinaus bekannt und geachtet, was in zahlreichen Ehrungen zum Ausdruck kam. Er hat unter anderem an der Erforschung der Radioaktivität erfolgreich mitgearbeitet. Neue Erkenntnisse auf dem Gebiet der inneren Ballistik sind ihm ebenso zu verdanken wie zahlreiche Veröffentlichungen auf verschiedenen Gebieten der Physik. Besonders beschäftigten ihn die Verbrennungserscheinungen, die Struktur der Flammen, wie überhaupt die Theorie der Wärme, wie sein ausgezeichnetes Lehrbuch „Theorie der Wärme“ vom Jahre 1921 sowie seine Schrift „Vorlesungen über Wärmelehre“ vom Jahre 1944 bezeugt.

Als Experimentalphysiker war Mache der Forschung im Laboratorium, als Professor aber auch der Lehre im Hörsaal und der Sorge um die Studierenden hingegaben, denen er in meisterhaftem Vortrag sein Wissen vermittelte. Seinen Schülern, Mitarbeitern und Kollegen war er ein hilfsbereiter Freund und Berater, an den sie sich stets mit Hochschätzung und Dankbarkeit erinnern werden. C. Kämmerer, Wien.

## Buchbesprechungen.

**Mathematics for Students of Engineering and Applied Science.** Von L. B. Benny. Mit 177 Textabb., VII, 783 S. London-New York-Toronto: G. Cumberledge, Oxford University Press. 1954. Geb. 35 s. net.

Das vorliegende Werk muß im Hinblick auf die Eigenart des englischen Hochschulwesens gewürdigt werden. Es ist als Behelf für die Studierenden der technischen Wissenschaften und der Naturwissenschaften gedacht, die ein „Higher National Certificate“ anstreben und stellt daher in gewissem Sinne eine Fortsetzung der vom gleichen Verfasser stammenden Bücher „Mathematics for students of technology“, „Junior Course“ und „Senior Course“ dar. Demgemäß können daher sehr rasch bedeutende Fortschritte in der Erarbeitung des Stoffes gemacht werden, wobei physikalische Gesichtspunkte oftmals im Vordergrund stehen. Die Darstellung ist klar und übersichtlich und verliert sich niemals in unwesentliche Details, für die sich aus der Zielsetzung des Werkes keine Rechtfertigung ergibt. Soweit die Beweise durchgeführt werden, gründen sie sich immer auf genau formulierte Voraussetzungen in der jeweils für notwendig gehaltenen Allgemeinheit; der Verfasser scheut sich jedoch nicht, oftmals auch Sätze ohne Beweise anzuführen und sich darauf zu beschränken, die Erfüllung der Voraussetzungen für die Gültigkeit an Beispielen zu illustrieren. Die Fehlerhaftigkeit mancher Figuren, die räumliche Gebilde



darstellen, kann dadurch erklärt werden, daß die Pflege der konstruktiven Methoden der Geometrie im englischen Sprachgebiet etwas vernachlässigt wird. Eine überaus umfangreiche Sammlung von Übungsaufgaben ermöglicht es dem Leser, sich die routinemäßige Beherrschung des Stoffes anzueignen. Der reiche Inhalt wird jedoch dem Werk auch außerhalb Englands die verdiente Verbreitung bringen. Das Werk gliedert sich in die Kapitel: Limits-convergence of series — Binomial, exponential and logarithmic series hyperbolic functions; Imaginary and complex quantities — Moivre's Theorem — Algebraic equations; Determinants; The elements of plane coordinate geometry; The elements of solid coordinate geometry; Vectors and vector products; Differentiation and its applications; The expansion of functions in series — The Theorems of Taylor and Maclaurin; Integration; Applications of integration; Differential equations; Functions of more than one independent variable — partial differentiation and its applications; The integration of linear differential equations in series; Fourier Series — Harmonic Analysis; Partial differential equations; Multiple integrals and their applications; Spherical Trigonometry; Differentiation of Vectors; Errors of observation — Method of least squares; Miscellaneous Exercises; Answers.

R. Inzinger, Wien.

**Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists.** Von P. F. Byrd und M. D. Friedman. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LXVII.) Mit 22 Textabb., XIII, 355 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 36.—, geb. DM 39.60.

Der Techniker und Physiker ist an einer raschen Auswertung der bei seinen Untersuchungen auftretenden Integralen sehr interessiert, weshalb er es als lästig empfindet, die mathematische Literatur zur Durchführung oftmals umfangreicher Substitutionen heranziehen zu müssen. Dies ist der Grund, weshalb sich Integraltafeln in letzter Zeit einer stets zunehmenden Beliebtheit erfreuen. Ein besonderes Bedürfnis lag für die Anlage einer umfangreichen Tafel elliptischer Integrale vor, das durch das vorliegende Werk in jeder Hinsicht voll befriedigt wurde. Die Verfasser stellten sich die Aufgabe, ein Handbuch der elliptischen Integrale zusammenzustellen, dessen Anwendung keine wesentlichen Kenntnisse aus der Theorie voraussetzt. Es enthält rund 3000 Integrale und Formeln in der Legendreschen und Jacobischen Bezeichnung, die den meisten praktischen Bedürfnissen in vollem Umfange genügen dürften. Daneben werden viele Transformationen und Rekursionsformeln angegeben, die es gestatten, auftretende Integrale auf die in der Sammlung enthaltenen Typen zurückzuführen. Eine übersichtliche Anlage des Stoffes sowie ausführliche Erklärungen und wechselseitige Verweisungen erleichtern die Handhabung des Werkes. Für numerische Auswertungen stehen Zahlentafeln für die Integrale der ersten und zweiten Gattung in der Legendreschen Normalform sowie für die Jacobische Zetafunktion und die Heumansche Lambdafunktion zur Verfügung. Inhaltsverzeichnis: Definitions and Fundamental Relations; Reduction of Algebraic Integrands to Jacobian Elliptic Functions; Reduction of Trigonometric Integrands to Jacobian Elliptic Functions; Reduction of Hyperbolic Integrands to Jacobian Elliptic Functions; Tables of Integrals of Jacobian Elliptic Functions; Elliptic Integrals of the Third Kind; Table of Miscellaneous Elliptic Integrals Involving Trigonometric or Hyperbolic Integrands; Elliptic Integrals Resulting from Laplace Transformations; Hyperelliptic Integrals; Integrals of the Elliptic Integrals; Derivatives; Miscellaneous Integrals and Formulas; Expansions in Series; Appendix; Bibliography; Index.

R. Inzinger, Wien.

**Model Analysis of Structures.** Von T. M. Charlton. (Spon's Civil Engineering Series. Herausgegeben von W. Fisher Cassie.) Mit 58 Textabb., XII, 142 S. London: E. & F. N. Spon Limited. 1954. Geb. 21s. net.

Es ist sehr verdienstlich, daß es der Autor unternommen hat, Verfahren für Modellversuche zur Bestimmung der Beanspruchung statisch unbestimmter Baukonstruktionen in Buchform zusammenzufassen. Behandelt werden darin vornehmlich Fachwerke und Rahmen, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung besteht, doch wird auch auf den Fall eines nichtlinearen Zusammenhangs eingegangen. Hervorzuheben sind ferner die Ausführungen über die Wirtschaftlichkeit von Modellversuchen.

Das sehr klar geschriebene und gut ausgestattete Buch verdient daher die Beachtung jedes Statikers.

E. Czitany, Wien.

**Technische Strömungslehre.** Von B. Eck. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 407 Textabb., X, 422 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. Geb. DM 29.40.

Ein Werk, das in vierter Auflage erscheint, ist bestimmt so bekannt und beliebt, daß es nicht weiter empfohlen werden muß. Der Verfasser hat aber die neue Auflage auch noch etwas

erweitert und verbessert. In der Gasdynamik werden das Ranquesche Wirbelrohr und die  $\lambda$ -Stöße besprochen. Auch sonst findet man Ergänzungen und Verbesserungen. Auch wurde die Anzahl der Abbildungen vermehrt, womit dem Wunsche mancher Leser entsprochen wurde.

Die Strömungslehre von Eck wird wegen ihrer Reichhaltigkeit und erstklassigen Ausstattung wieder vielen Ingenieuren willkommen sein.

*R. Bruniak, Wien.*

**Aufgaben aus der Hydromechanik.** Von K. Federhofer. 245 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 235 Textabb., V, 221 S. Wien: Springer-Verlag. 1954. S 144.—, geb. S 162.—; sfr. 24.50, geb. sfr. 27.70; § 5.70, geb. § 6.45; DM 24.—, geb. DM 27.—.

Mit der Fertigstellung dieses Bandes hat der Verfasser seine Sammlung von Übungsaufgaben abgeschlossen, die nunmehr die Mechanik des Punktes und der starren Systeme sowie die Hydromechanik umfaßt. Die Flugmechanik und Gasdynamik, die inzwischen eigene Spezialgebiete geworden sind, werden nicht behandelt. Da diese Aufgabensammlung an Stelle der bekannten von Wittenbauer gedacht ist, verdient hervorgehoben zu werden, daß Herr Prof. Federhofer Aufgaben, zu deren Lösung besondere Tricks erforderlich sind, soweit wie möglich vermieden hat, dafür aber physikalisch und technisch wichtige Probleme bevorzugt. Dadurch ist die Aufgabensammlung nicht nur eine wertvolle Ergänzung der Vorlesung, sondern auch ein ausgezeichneter Behelf zum Studium der Hydromechanik geworden. Da die Lösungen überdies noch erklärt werden, kann eine Durcharbeitung des Buches außer Studierenden auch praktisch tätigen Technikern großen Nutzen bringen.

*F. Magyar, Wien.*

**Einführung in die Atomphysik.** Von W. Finkelnburg. Dritte, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 266 Textabb., XI, 543 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. Geb. DM 44.—.

Die „Atomphysik“ des Autors ist in der Fachwelt bereits ein Begriff geworden, so daß das Werk überhaupt keiner Besprechung mehr bedürfte. Wenn ein streng wissenschaftliches Buch seit 1948 drei deutsche und eine amerikanische Auflage aufweist, so ist durch diese Tatsache allein die Nachfrage nach dem Werk bewiesen. Daß das Buch dennoch gerade in der vorliegenden Zeitschrift ausführlich besprochen wird, verfolgt den Zweck, weite Kreise der österreichischen Ingenieure auf diese für sie unerschöpfliche Fundgrube moderner physikalischer Erkenntnisse hinzuweisen. Gerade der Techniker neigt häufig zur Ablehnung neuerer physikalischer Anschauungen und Vorstellungen, da er entweder ihren praktischen Wert nicht erkennt oder aber die Schwierigkeiten beim Einarbeiten in das Gebiet überschätzt.

Der besondere Wert des vorliegenden Buches besteht nun darin, daß es nicht ein einzelnes Spezialgebiet der Atomphysik bis ins letzte Detail behandelt, sondern den Leser in das gesamte Gebiet in möglichst einfacher, aber exakter Weise einführt. Es vermittelt ihm ein anschauliches Bild der Grundprobleme und Ergebnisse aller Gebiete der Atomphysik, wobei Experiment und theoretische Deutung in gleicher Weise zu ihrem Recht kommen. Daher muß besonders der Experimentalphysiker das Buch begrüßen, da der Autor auch die experimentellen Grundlagen der Atomphysik behandelt und damit die Auffassung beseitigt, daß die moderne Physik nur eine mathematisch-philosophische Angelegenheit sei.

Es ist in neuerer Zeit Mode geworden, unter dem Begriff der Atomphysik fast nur die Kernphysik, und darunter in erster Linie die theoretische Kernphysik, zu verstehen. Wenn auch die großen Erfolge dieser physikalischen Richtung unleugbar sind, so benötigt der moderne Techniker jeder Fachrichtung eine grundlegende Ausbildung, sowohl auf dem Gebiete der experimentellen Kernphysik als auch insbesondere auf dem Gebiete der Physik der Atomhülle. Daher muß es als besonderer Vorzug des vorliegenden Buches betrachtet werden, daß ein ebenso breiter Rahmen wie für die Physik der Atomkerne den Atomspektren, dem Atombau, der quantenmechanischen Atomtheorie, der Physik der Moleküle und der Festkörper-Atomphysik zur Verfügung steht.

Damit ist das Buch nicht nur den Physikern, besonders natürlich den studierenden, sondern auch allen in der Praxis stehenden Ingenieuren, Metallkundlern, Chemikern, Astronomen, Mineralogen, Kristallographen und Biologen in gleicher Weise zu empfehlen.

Daß die gefällige Ausstattung des Buches sein Studium besonders genüßreich gestaltet, sei noch am Schlusse hervorgehoben.

*F. Regler, Wien.*

**Flächentragwerke.** Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Von K. Girkmann. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 308 Textabb., XVII, 558 S. Wien: Springer-Verlag. 1954. Geb. S 398.—, sfr. 67.90, § 15.80, DM 66.40.

Das vor 8 Jahren erschienene Werk erfreut sich dank der Fülle seines in strenger, aber leicht verständlicher Darstellung gebotenen Inhaltes der ihm gebührenden weitesten Verbreitung im

In- und Auslande, so daß nach der 1948 erschienenen 2. vermehrten und verbesserten Auflage nun bereits eine dritte Auflage notwendig geworden ist.

Bei Beibehaltung der Gliederung in fünf Abschnitte (Allgemeine Grundlagen der mathematischen Theorie der Elastizität, Scheiben, Platten, Schalen, Faltwerke) erfuhr das Buch gegenüber der 2. Auflage eine Erweiterung um 56 Seiten. Dadurch war u. a. die eingehendere Behandlung der Kreisscheibe und des beiderseits frei drehbar gelagerten Plattenstreifens mit beliebiger Belastung mit den Sonderfällen des Plattenstreifens bei Angriff von Einzelmomenten möglich. In den Abschnitten über Scheiben und Platten konnte eine Reihe von Lösungsergebnissen nunmehr in geschlossener Form entwickelt werden, ferner wurden manche früher in Doppelreihen gewonnene Erbenisse durch einfache Reihen dargestellt, wodurch die numerische Auswertung erleichtert wird.

Der Abschnitt über Schalen wurde durch Hinzufügung der von K. Girkmann im Vorjahr entwickelten vereinfachten Theorie des Tonnendaches mit Kreiszylinderschale nebst einem vollständigen Zahlenbeispiel und durch Wiedergabe der Ergebnisse neuerer experimenteller Untersuchungen über die Schalenbeulung bereichert.

Der letzte Abschnitt über Faltwerke erhielt eine wertvolle Erweiterung durch Vorführung der vollständigen Berechnung eines Faltwerksturmes mit Dachscheibe

Große Sorgfalt ist in der neuen Auflage auch der Vervollständigung des Schrifttumverzeichnisses durch Vermehrung um rund 140 neue Hinweise zugewendet worden.

Man kann abschließend feststellen, daß dieses rühmlichst bekannte, mit zahlreichen guten Abbildungen versehene Werk in seiner neuen Bearbeitung den gegenwärtigen Stand der Theorie der Flächentragwerke mit Ausschluß der Probleme großer Formänderungen und des Durchschlagproblems der Kugel- und Zylinderschale vollauf berücksichtigt.

Es erübrigt sich, zum Lobe dieses vom Verlage schön ausgestatteten Buches etwas zu sagen. Der Unterzeichnete ist der Zustimmung vieler Fachgenossen sicher, wenn er den Wunsch ausspricht, es möge diesem Buche über Elastostatik der Flächentragwerke in absehbarer Zeit ein solches über Elastokinetik folgen.

K. Federhofer, Graz.

**Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie.** Von W. Großmann. Mit 54 Textabb., VIII, 261 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 19.80.

Dieses Buch ist die Erweiterung einer im Jahre 1952 von W. Großmann erschienenen Autographie. Die frühere Gliederung des Stoffes in die fünf Abschnitte: Grundzüge der Fehlerlehre, Ausgleichung von direkten Beobachtungen, Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen und Anhang ist beibehalten worden, doch wurde der Inhalt des Werkes durch die Aufnahme einiger wichtiger Kapitel weiter ausgebaut. Neben kleinen Ergänzungen sind neu hinzugekommen die Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes nach Hagen, das Entwicklungsverfahren von Boltz, eine kurze Darstellung der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, Bedingungsgleichungen mit Unbekannten, die Anwendung äquivalenter Fehlergleichungen, die Ausgleichung durch schrittweise Annäherung, die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen und ein Überblick über die mittleren Fehler der Genauigkeitsmaße. Dieses Buch hält damit etwa die Mitte zwischen den einfacheren Kurzausgaben von Hegemann, Werkmeister u. a. und den umfassenderen Werken von Jordan und Helmert.

Die guten Eigenschaften der ersten Veröffentlichung kennzeichnen auch diese Ausgabe mit ihrem klaren Aufbau und der guten Auswahl der Beispiele, wozu nun auch noch die schöne Ausstattung des Werkes durch den Verlag mit einem sauberen Druck und einer übersichtlichen Anordnung der Formelsysteme hinzukommt. Die vorliegende Neuherausgabe wird daher von den Lehrenden und Studierenden, aber auch von den Praktikern lebhaft begrüßt werden.

F. Hauer, Wien.

**Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder.** Von E. Melan und H. Parkus. Mit 30 Textabb., V, 114 S. Wien: Springer-Verlag. 1953. Geb. S 110.—, sfr. 18.90, \$ 4.40, DM 18.50.

Mit diesem Büchlein hat das baustatische Schrifttum eine sehr erfreuliche Bereicherung erfahren. Das Gebiet der Wärmespannungen ist zwar im Laufe von Jahrzehnten in zahlreichen Einzelveröffentlichungen bearbeitet worden, die speziellen Problemen gewidmet sind. Das Schriftenverzeichnis dieses Buches führt fast 150 solcher Arbeiten an. Doch fehlte bisher eine einheitliche zusammenfassende Darstellung dieser für die Praxis äußerst wichtigen Unter-

suchungen. Die beiden Verfasser haben in den letzten Jahren wiederholt wertvolle Beiträge zur Berechnung der Wärmespannungen in Scheiben, Platten und Rotationsschalen gegeben und sind daher für die hier erstmals gegebene einheitliche Darstellung der Theorie der Wärmespannungen besonders legitimiert.

Nach einleitenden Bemerkungen über die Grundgesetze der Wärmeleitung, über die thermisch-elastischen Grundgleichungen und über spannungsfreie Temperaturfelder und über die Bedingungen der Spannungsfreiheit im Falle ebener Felder werden die durch Temperaturänderungen in einem ebenen Stabsystem entstehenden Spannungen und Verformungen berechnet. Auf den noch folgenden 80 Seiten dieser Schrift werden dann zahlreiche Probleme der Wärmespannungen in Scheiben, Platten, Umdrehungskörpern und in dünnen Rotationsschalen behandelt und auch Probleme der Wärmespannungen in Körpern mit Einschlüssen erörtert.

Vom Leser wird die Kenntnis der wichtigsten Tatsachen der Elastizitätslehre und der Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen sowie einiges über die Lösung partieller Differentialgleichungen und aus der Potentialtheorie vorausgesetzt. In einem folgenden Bande beabsichtigen die Verfasser auch die nichtstationären Temperaturfelder zu behandeln und einiges über elastisch-plastische Spannungszustände zu bringen.

Das Buch zeichnet sich durch eine klare Darstellung aus und kann nicht nur dem entwerfenden Ingenieur, sondern auch den Hörern höherer Hochschulsemester zum Studium wärmstens empfohlen werden.

*K. Federhofer*, Graz.

**Lehrbuch des Stahlbetonbaues.** Grundlagen und Anwendungen im Hoch- und Brückenbau. Von *A. Pucher*. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 321 Textabb., X, 331 S. Wien: Springer-Verlag. 1953. Geb. S 192.—, sfr. 32.70, § 7.60, DM 32.—.

Auf die Vorzüge dieses sehr modernen Lehrbuches habe ich schon in meiner Buchbesprechung zur ersten Auflage hingewiesen und wiederhole, daß Pucher bestrebt ist, alle Probleme grundsätzlich möglichst allgemein zu erfassen und unter Einsatz seiner ausgezeichneten Beherrschung mathematischer Berechnungsverfahren zu lösen. Dies gilt ebenso für die in der vorliegenden zweiten Auflage neu hinzugekommenen Abschnitte.

Im Kapitel über das Biegsungsproblem des Stahlbetons im plastischen Bereich sind der allgemeinen Lösung die aus den Vorschriften der ÖNORM B 4200/4. Teil folgenden Spezialisierungen zugefügt und neue Bemessungstafeln entwickelt worden. So notwendig ein dringender Hinweis auf die höhere Verantwortung der planenden und ausführenden Ingenieure bei Anwendung dieses neuen Traglastverfahrens zufolge der damit gegebenen höheren Baustoffausnutzung auch sein mag, sollte doch gerade in einem Lehrbuch eine Kritik, wie sie der letzte Satz auf Seite 137 ausspricht, nicht aufscheinen.

Neu eingefügt ist die Behandlung des Knickproblems im plastischen Bereich des Stahlbetons mit einer ausführlichen Darstellung der Theorie von Engesser und darauf aufbauend im Abschnitt „Brückenbau“ das Stabilitätsproblem schlanker Bogen. Ferner ein Kapitel über die Berechnung von „Bogen mit stützliniennaher Ache“ und eine Ergänzung des Kapitels Torsion für gleichzeitiges Auftreten von Schub- und Verdrehungsbeanspruchungen.

Nach Inhalt und Ausstattung muß dieses Werk zu den besten Neuerscheinungen der letzten Jahre gezählt werden, das allerdings vom Leser ein überdurchschnittliches Maß von Vorkenntnissen voraussetzt. Auch die vorliegende zweite Auflage wird viele Freunde finden.

*F. Pongratz*, Wien.

**Elektrische Triebfahrzeuge.** Ein Handbuch für die Praxis sowie für Studierende. Von *K. Sachs*. In zwei Bänden. Erster Band: Mit 847 Textabb., XV, 700 S. — Zweiter Band: Mit 850 Textabb. und 16 Tafeln, XII, 696 S. Frauenfeld: Verlag Huber & Co. AG. 1953. Geb. sfr. 65.—.

Im Jahre 1928 erschien im Springer-Verlag in Berlin das Buch „Elektrische Vollbahnlkomotiven“ von Prof. Sachs und zehn Jahre später sein Werk über „Die ortsfesten Anlagen elektrischer Bahnen“ im Verlag Orell Füssli in Zürich. Nun hat der Verfasser ein zweibändiges Werk geschaffen, das umfassend die elektrischen Triebfahrzeuge behandelt.

Der erste Band bringt die theoretischen Grundlagen: Zugkraft, Bremskraft und Leistung und den mechanischen Teil: Gesamtaufbau, Laufwerk und Triebwerk. Im zweiten Band findet man die elektrische Ausrüstung: Triebfahrzeuge für Gleichstrom, Einphasen-Wechselstrom, Drehstrom und Umformer-Triebfahrzeuge. In eigenen Abschriften werden die Triebfahrzeuge

für Zahnstangenstrecken besprochen, dann der Trolleybus und die Speicher-Triebfahrzeuge. Fünfzehn Tafeln mit ausgeführten Triebfahrzeugen bilden den Abschluß.

Hier liegt ein Werk vor, das mit großer Sachkenntnis und mustergültiger Sorgfalt angelegt ist. Man sehe sich nur die 1700 Zeichnungen und Abbildungen an, oder die Hinweise auf das Schrifttum und die Patente!

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß der Preis dieses Werkes ungewöhnlich niedrig ist. Dies wurde durch eine Subventionierung durch schweizerische Industrieunternehmungen, Bahnen, Elektrizitätslieferungsgesellschaften usw. ermöglicht.

Das Werk wird durch viele Jahre das Standardwerk über die elektrischen Triebfahrzeuge bleiben, ein Lehr- und Handbuch, nach dem jeder greifen muß, der eine eingehende Belehrung sucht oder auf eine besondere Frage eine erschöpfende Antwort wünscht. Der Verfasser ist zur Vollendung seiner Arbeit zu beglückwünschen.

*H. Sequenz, Wien.*

## Autorenverzeichnis.

- Basch, A.**, Über Schwingungen von Systemen mit zwei Freiheitsgraden. S. 83.
- Berger, E. R.**, Tensorflächen, Tensorellipsen und Tensorkreise. S. 231.
- Bruniak, R.**, Über die Rückströmung in der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß. S. 87.
- , Technische Strömungslehre. Von B. Eck. (Buchbesprechung.) S. 308.
- Czitary, E.**, Model Analysis of Structures. Von T. M. Charlton. (Buchbesprechung.) S. 308.
- Desoyer, K.**, s. Heinrich, G.
- Federhofer, K.**, Technische Dynamik. Von C. B. Biezeno und R. Grammel. Zweite Auflage. Erster Band: Grundlagen und einzelne Maschinenteile. Zweiter Band: Dampfturbinen und Brennkraftmaschinen.
- , Knicklast der axial gedrückten Kreiszylinderschale bei Vorhandensein eines entlang des Zylindermantels veränderlichen elastischen Widerstandes. S. 90.
- , Vorlesungen über Baustatik. Zweite Auflage. Erster Band: Statisch bestimmte Systeme. — Spannungsberechnung. — Elastische Formänderungen. — Stabilitätsprobleme. — Seile. Von F. Stüssi. (Buchbesprechung.) S. 229.
- , Flächentragwerke. Von K. Girkmann. Dritte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 309.
- , Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Von E. Melan und H. Parkus. (Buchbesprechung.) S. 310.
- Frank, W.**, Zur Berechnung von Potentialströmungsfeldern. S. 97.
- Geiringer, Hilda**, Bemerkung zur Theorie der Charakteristiken. S. 107.
- Glaser, W.**, Principles of Electronics. Von L. T. Agger. (Buchbesprechung.) S. 76.
- , Eine neue Begründung der wellenmechanischen Elektronentheorie. S. 110.
- , Die Lecher-Leitung in der Kurzzeit-Impulstechnik. S. 121.
- Hauer, F.**, Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie. Von W. Großmann. (Buchbesprechung.) S. 310.
- Heinrich, G.** und K. Desoyer, Die Kippsteifigkeit einseitig wirkender Strömungs-spurlager. S. 138.
- Inzinger, R.**, Mathematics for Students of Engineering and Applied Science. Von L. B. Benny. (Buchbesprechung.) S. 307.
- , Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Von P. F. Byrd und M. D. Friedman. (Buchbesprechung.) S. 308.
- Kämmerer, C.**, Thermodynamische Grundlagen. Von R. Plank. (Buchbesprechung.) S. 78.
- , Strömung in einer Expansionsdüse mit Reibung. S. 293.
- , H. Mache gestorben. (Persönliches.) S. 307.
- Kirste, L.**, Abwickelbare Verformung dünnwandiger Kreiszylinder. S. 149.
- Korst, H.**, Auflösung eines ebenen Freistrahlrandes bei Berücksichtigung der ursprünglichen Grenzschichtströmung. S. 152.
- Kracmar, F.**, Das magnetische Feld senkrecht gekreuzter, stromdurchflossener Leiter. S. 158.
- Krzywoblocki, M. Z. E.**, Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. C. Axially Symmetric Flow and Singularities. S. 237.
- Mache, H.**, Über die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes und über die Normalform einer jeden Zustandgleichung. S. 161.
- Magyar, F.**, Hydraulik. Ihre Grundlagen und praktische Anwendung. Von J. Kozeny. (Buchbesprechung.) S. 228.
- , Aufgaben aus der Hydromechanik. Von K. Federhofer. (Buchbesprechung.) S. 309.
- Melan, E.**, Wärmespannungen infolge eines rotierenden Temperaturfeldes. S. 165.
- Melan, H.**, Prof. Dr. Franz Magyar 60 Jahre. S. 79.
- Müller, W.**, Beitrag zur Biegungstheorie der Mehrpilzplatte. S. 1.
- , Die Bewegung eines Rotationskörpers in der reibungslosen Flüssigkeit und das instabile Moment der Druckkräfte. S. 171.
- , Zur Bestimmung der Trägheitskoeffizienten unsymmetrischer Rotationskörper. S. 263.

- Oswatitsch, K. und L. Sjödin, Kegelige Überschallströmung in Schallnähe. S. 284.
- Parkus, H., Das Anlaufen einer Schubdüse mit vorgeschaltetem Rohr. S. 185.
- Pongratz, F., Die Bemessung der Stahlbetonbauteile nach ÖNORM B 4200. Von K. Jäger. 4. Teil. (Buchbesprechung.) S. 77.
- , Lehrbuch des Stahlbetonbaues. Von A. Pucher. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 311.
- Pröll, A., Beiträge zum Schwingenflugproblem. S. 189.
- Puwein, M. G., Die mutierte Pendellänge. S. 54.
- Regler, F., Einführung in die Atomphysik. Von W. Finkelnburg. Dritte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 309.
- Richardson, E. G. and R. I. Tait, Measurements on the Damping of Flexural Vibrations in Rods Immersed in Liquids. S. 200.
- Richter, W., Koordinatentransformationen mit Hilfe eines Fluchtliniennomogramms und Anwendungen auf die graphische Lösung von Differentialgleichungen. S. 39.
- Sequenz, H., Stromverdrängungsverluste in gesehnten, zweischichtigen Stabwicklungen. S. 207.
- , Elektrische Triebfahrzeuge. In zwei Bänden. Von K. Sachs. (Buchbesprechung.) S. 311.
- Signorini, A., Über eine Erweiterung der linearisierten Theorie der Elastizität. S. 47.
- Sjödin, L., s. Oswatitsch, K.
- Souczek, E., Zur Berechnung der Unterwassertragfläche. S. 214.
- Tait, R. I., s. Richardson, E. G.
- Torre, C., Kritik und Ergänzung des Maxwell-schen Ansatzes für elastisch-zähe Stoffe. Verdrehung von Stäben als Beispiel. S. 55.
- Tremmel, E., Zur Theorie kreisberandeter Bogenscheiben. S. 11.
- Vitovec, F., Über die Verformungsgeschwindigkeit in der einschnürenden Zugprobe. S. 221.
- Wunderlich, W., Tratado de Nomografia. Von J. C. Belgrano. (Buchbesprechung.) —, Ein merkwürdiges Zwölfstabgetriebe. S. 224.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Soeben erschienen:

**Die Grundlagen der Akustik.** Von Dipl.-Ing. Dr. rer. nat. E. Skudrzyk, B. Sc. (Eng.), A. C. G. I., a. o. Professor für Niederfrequenztechnik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 450 Textabbildungen. XXII, 1084 Seiten. 1954.

Ganzleinen S 880.—, DM 147.—, § 35.—, sfr. 150.—

Mit diesem Werk legt der Verfasser ein **Grundlagenbuch** vor, das mit der gebotenen Ausführlichkeit in die vielgestaltigen Probleme der modernen Akustik einführt und, darüber hinausgehend, das große Gebiet so erschöpfend darstellt, als es dem heutigen Stande der Forschung entspricht. Der Verfasser bedient sich in der Darstellung moderner Methoden und bringt eine Reihe zum Teil noch unveröffentlichter Ergebnisse eigener Arbeiten. Das Buch wendet sich nicht nur an den Akustiker, sondern an den Ingenieur und Physiker im weiteren Sinn. Fragen der reinen Mechanik werden übergangen, dagegen hat der Verfasser besondere Sorgfalt auf die konsequente Durchführung sämtlicher Ableitungen und die Auswahl eines übersichtlichen Systems von Bezeichnungen gelegt. Zur Erleichterung des Studiums ist jedem Kapitel eine kurze Zusammenfassung vorangestellt. Die **Grundliteratur** wird in einem umfassenden Verzeichnis mit über 4000 Zitaten angeführt.

**Theorie ideal plastischer Körper.** Von W. Prager, Eng. D., Professor of Applied Mechanics, Brown University, Providence, R. I., USA., und P. G. Hodge, Jr., Ph. D., Associate Professor of Applied Mechanics, Polytechnic Institute of Brooklyn, N. Y., USA. Ins Deutsche übertragen von F. Chmelka, Dr. phil., Dr. techn., Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 97 Textabbildungen. X, 274 Seiten. 1954.

Ganzleinen S 198.—, DM 33.—, § 7.85, sfr. 33.80

In der letzten Zeit gewinnt die Plastizitätstheorie immer mehr an Bedeutung. Sie macht Vorgänge, wie Walzen, Ziehen Pressen usw., der Berechnung zugänglich, sie ermöglicht eine der Wirklichkeit entsprechende Bestimmung des Sicherheitsfaktors gegen Kollaps von Tragwerken und anderes mehr. Die vorliegende Übersetzung des grundlegenden Werkes aus dem Englischen ins Deutsche schließt somit eine empfindliche Lücke, indem sie dieses wichtige Wissenschaftsgebiet nun auch dem deutschsprachigen Leser- und Forscherkreis zugänglich macht. Das Buch geht, was Vorkenntnisse anbelangt, von durchaus elementaren Voraussetzungen aus, und bringt nicht nur eine Darstellung der bereits seit langem gelösten Grundaufgaben, sondern umfaßt auch die neuesten Erkenntnisse der Theorie.

**Einführung in die Statik.** Von Dr. phil., Dr. techn. F. Chmelka, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien, und Dr. techn. E. Melan, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Sechste, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 161 Textabbildungen. VII, 210 Seiten. 1954.

Steif geheftet S 84.—, DM 14.—, § 3.35, sfr. 14.40

Während die letzten beiden Ausgaben des bekannten Einführungsbuches unveränderte Nachdrucke der dritten Auflage waren, was durch die Nachkriegsschwierigkeiten bedingt war, ist die jetzt erscheinende sechste Auflage gründlich bearbeitet und wesentlich ergänzt worden. Die theoretischen Abschnitte sind wesentlich vertieft und verbreitert und zahlreiche neue Beispiele hinzugefügt worden, wodurch die didaktischen Vorzüge der Darstellung noch erhöht wurden. Neu ist ein Abschnitt, in dem einige statisch bestimmte Tragwerksformen besprochen sind, deren Behandlung erfahrungsgemäß dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten.

**Methoden und Probleme der Wettervorhersage.** Von Dr. H. Reuter, Privatdozent an der Universität Wien, Observator an der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien. Mit 46 Textabbildungen. VIII, 161 Seiten. 1954.

Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, § 5.25, sfr. 22.60

Das Buch will einen Überblick über die wichtigsten Vorhersagemethoden vermitteln, wobei den modernen Methoden und Problemen besondere Beachtung geschenkt wurde, da über diesen Gegenstand noch keine zusammenfassenden Darstellungen vorliegen. Es tritt dabei naturgemäß die theoretische Seite der Problematik der Wetterprognose stärker in Erscheinung als in früheren Darstellungen über denselben Gegenstand. Es wird jedoch versucht, mit einem möglichst geringen Aufwand an Mathematik einem größeren Leserkreis die nicht immer ganz einfachen Probleme zugänglich zu machen.

**Beschäftigungspolitik.** Von Dr. W. Taucher, o. Professor an der Universität Graz. V, 126 Seiten. 1954.

Steif geheftet S 36.—, DM 6.—, § 1.45, sfr. 6.20

„... Professor Taucher gibt in seinem Buch einen sehr umfassenden Überblick über die vielseitige Problematik der Beschäftigungspolitik. Er verzichtet darauf, die einzelnen Seiten des Problems bis in alle Einzelheiten zu analysieren. Er gewinnt dadurch die Möglichkeit, in einer auch einem breiteren Publikum zugänglichen Form, die wichtigsten Gesichtspunkte und Erkenntnisse besonders zu unterstreichen. ...“

Die Industrie

**Die Wicklungen elektrischer Maschinen.** Von Heinrich Sequenz, Dipl.-Ing., Dr. techn., Dr.-Ing., Dr. phil., Professor an der Technischen Hochschule in Wien, korresp. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. In vier Bänden.

Soeben erschien:

Dritter Band: **Wechselstrom-Sonderwicklungen.** Mit 578 Textabbildungen. XIX, 397 Seiten. 1954. S 420.—, DM 70.—, \$ 16.65, sfr. 71.60; Gln. S 438.—, DM 73.—, \$ 17.40, sfr. 74.80

Früher erschienen:

Erster Band: **Wechselstrom-Ankerwicklungen.** Mit 408 Textabbildungen. XX, 365 Seiten. 1950. S 228.—, DM 37.—, \$ 9.—, sfr. 39.—; Gln. S 248.—, DM 40.—, \$ 9.90, sfr. 42.50

Zweiter Band: **Wenderwicklungen.** Mit 423 Textabbildungen. XVI, 331 Seiten. 1952. S 325.—, DM 54.—, \$ 12.90, sfr. 56.—; Gln. S 343.—, DM 57.—, \$ 13.50, sfr. 59.—

In Vorbereitung:

Vierter Band: **Herstellung der Wicklungen.**

„... Sequenz hat es verstanden, den immerhin spröden Stoff so zu meistern, daß es dem Ingenieur, der sich mit dem Entwurf von Wechselstromwicklungen befaßt, möglich ist, das Buch mit Nutzen durchzustudieren. Das gilt auch für einzelne Studierende des Elektromaschinenbaues, die das Bedürfnis fühlen, sich etwa gelegentlich einer Studien- oder Diplomarbeit in die Materie zu vertiefen...“

VDI-Zeitschrift

**Handbuch der mikrochemischen Methoden.** Herausgegeben von Friedrich Hecht, Professor an der Universität Wien, und Michael K. Zacherl, Professor an der Tierärztlichen Hochschule in Wien. In fünf Bänden.

Jeder selbstständig erscheinende Bandteil bzw. Band ist einzeln käuflich. Bei Verpflichtung zur Abnahme des Gesamtwerkes sowie bei Vorbestellung der einzelnen Teile ermäßigt sich der endgültige Ladenpreis um 20% ■

Soeben erschien:

**Band I / Teil 1**

**Präparative Mikromethoden in der organischen Chemie.** Von Prof. Dr. Hans Lieb, Graz, und Dipl.-Ing. Dr. Wolfgang Schöniger, Graz.

**Mikroskopische Methoden.** Von Prof. Dr. Ludwig Kofler † und Dr. Adelheid Kofler, Innsbruck. Mit 275 Textabbildungen VI, 236 Seiten. 1954

Bei Subskription auf das Gesamtwerk: Ganzleinen S 228.—, DM 38.—, \$ 9.05, sfr. 38.90 ■

Endgültiger Ladenpreis: Ganzleinen S 285.—, DM 47.50, \$ 11.30 sfr. 48.60 ■

Demnächst erscheint:

**Band II / Teil 1**

**Radiochemische Methoden der Mikrochemie.** Von Priv.-Doz. Dr. Engelbert Broda, Wien, und Dr. Thomas Schönfeld, Wien.

**Messung radioaktiver Strahlen in der Mikrochemie.** Von Prof. Dr. Berta Karlik, Wien, Dr. Traude Bernert, Wien, und Priv.-Doz. Dr. Karl Lintner, Wien.

**Photographische Methoden in der Radiochemie.** Von Dr. Hanne Lauda, Wien.

Mit etwa 90 Textabbildungen. Etwa 330 Seiten. 1955

Bei Vorausbestellung bis zum Erscheinen: Ganzleinen S 388.—, DM 64.80, \$ 15.45, sfr. 66.40 ■

Endgültiger Ladenpreis nach Erscheinen: Ganzleinen S 486.—, DM 81.—, \$ 19.30, sfr. 83.— ■

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuchs gilt der Vorbestellpreis weiter als Subskriptionspreis ■

In der Folge werden erscheinen:

Band I, Teil 2: **Biochemische Methoden einschließlich medizinischer Verfahren.** Von Th. Leipert, Wien. **Lebensmittel-mikrochemische Methoden.** Von F. Münchberg, Wien, und F. Zaribnický, Wien.

Band II, Teil 2: **Polarographie.** Von H. Hohn, Wien, und Otilie Schläger, Wien.

Band III: **Anorganisch-analytische Methoden.** Von F. Hecht, Wien.

Band IV: **Organisch-analytische Methoden.** Von M. K. Zacherl, Wien.

Band V: **Mikromethoden zur Bestimmung physikalisch-chemischer Konstanten.** Von Martha Sobotka, Graz.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung